

Verzweigung in Vektorraumbündeln
und
äquivariante Verzweigungstheorie

Thomas Bartsch

VERZWEIGUNG IN VEKTORRAUMBÜNDELN

UND

ÄQUIVARIANTE VERZWEIGUNGSTHEORIE

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Fakultät für Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Thomas Bartsch

am 1. September 1986

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Steinlein

2. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Fritsch

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1987

Inhalt

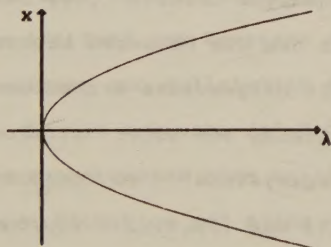
Einleitung	S. 3
Kapitel I. Verzweigung in Vektorraumbündeln	S. 12
§ 1. Einführung	S. 12
§ 2. Der Hauptsatz über Verzweigung in Vektorraumbündeln	S. 16
§ 3. Beweis der Sätze 2.3 und 2.6	S. 26
§ 4. Beispiele und Folgerungen aus dem Hauptsatz	S. 57
Kapitel II. Hilfsmittel aus der äquivarianten algebraischen Topologie	S. 64
§ 1. Äquivariante stabile (Ko-) Homotopietheorie	S. 64
§ 2. Äquivariante Čech-Erweiterungen	S. 83
Kapitel III. Äquivariante Verzweigungstheorie	S. 113
§ 1. Verzweigung von einer 1-kodimensionalen Teilmenge des Parameterraums	S. 114
§ 2. Der äquivariante Verzweigungssatz	S. 121
Anhang 1. Verallgemeinerte (Ko-) Homologietheorien	S. 143
Anhang 2. Der J-Homomorphismus	S. 151
Anhang 3. Vektorraumbündel	S. 154
Notationen	S. 161
Literaturverzeichnis	S. 163

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist das Problem der Verzweigung von Nullstellen stetiger Funktionen, das in seiner einfachsten Formulierung wie folgt lautet.

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^k$. Elemente $(\lambda, 0)$ von $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ heißen triviale Nullstellen (von f). $(\lambda, 0)$ heißt Verzweigungspunkt (von $f(\lambda, x) = 0$), wenn in jeder Umgebung von $(\lambda, 0)$ in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ eine nichttriviale Nullstelle existiert. Unter welchen Bedingungen an f ist ein vorgegebener Punkt $(\lambda_0, 0)$ Verzweigungspunkt?

Setzt man etwa $k=n=1$ und $f(\lambda, x) = x(x^2 - \lambda)$, so liefert die Nullstellenmenge von f das folgende Verzweigungsdiagramm (mit dem Verzweigungspunkt $(0, 0)$).



Verzweigung ist ein in naturwissenschaftlichen Systemen beobachtbares Phänomen. x bezeichnet die Unbekannten des Systems und λ die Parameter. An dieser Stelle soll kein physikalisches Modell beschrieben werden, aber kurz eine der bekanntesten Fragestellungen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

gen geschildert werden, die sich in das Problem Verzweigung von Nullstellen umformulieren lassen, nämlich die Hopf-Verzweigung.

Sei $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\varphi(\mu, 0) = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. [φ entspricht nicht dem f von oben.] Wir betrachten das gewöhnliche autonome Differentialgleichungssystem

$$(E_\mu) \quad \dot{x} = \varphi(\mu, x).$$

Offenbar ist für alle Parameterwerte $\mu \in \mathbb{R}$ die konstante Funktion $x(t) = 0$ eine stationäre Lösung von (E_μ) . Unter welchen Bedingungen an φ zweigen periodische Lösungen von $(0, 0)$ ab? Das heißt: Wann gibt es in jeder Umgebung von $(0, 0)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Punkte (μ, x) , $x \neq 0$, so daß die eindeutig bestimmte Lösung von (E_μ) mit Anfangswert x periodisch ist?

Dieses Problem ist zuerst von Poincaré 1892 in seinen "Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste" [41] bearbeitet worden (für $n=2$). E. Hopf - nach dem das Phänomen benannt ist - fand 1942 in [20] ein relativ allgemeines Kriterium für die "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialgleichungssystems" - so der Titel seiner Arbeit.

Setzen wir $\lambda = (\mu, t)$ und $f(\mu, t, x) = \dot{\varphi}(\mu, t, x) - x$, wobei $\dot{\varphi}(\mu, \cdot, x)$ die eindeutig bestimmte Lösung von (E_μ) mit Anfangswert x ist, so folgt aus der Theorie gewöhnlicher autonomer Differentialgleichungen, daß die Nullstellenmenge von f gerade der Vereinigung der Orbits der stationären und periodischen Lösungen von (E_μ) entspricht. Auch wenn f nicht auf ganz $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ definiert ist, so ist die Rückführung von Hopf-Verzweigung auf Verzweigung von Nullstellen deutlich. Dies möge vorerst als Motivation zur Beschäftigung mit unserem Ausgangsproblem genügen.

Während Hopf-Verzweigung oft mit analytischen Mitteln (etwa dem Satz über implizite Funktionen) gezeigt wird, benötigt man zum Nachweis der Verzweigung von Nullstellen topologische Methoden, vor allem in Abwesenheit jeglicher Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. Ein typisches topologisches Argument geht etwa so:

Sei $k=1$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie oben. Falls $f(S^0 \times (B^n - \{0\}))$ in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ enthalten ist, so sind die Abbildungsgrade von $f_+: \{1\} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ und $f_-: \{-1\} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ definiert ($\mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1}$). Gilt $\deg f_+ \neq \deg f_-$, so sind f_+ und f_- nicht homotop, insbesondere besitzt f eine Nullstelle $(\lambda_\epsilon, x_\epsilon)$ in $B^1 \times_\epsilon S^{n-1}$ für alle $0 < \epsilon \leq 1$. Sonst wäre nämlich

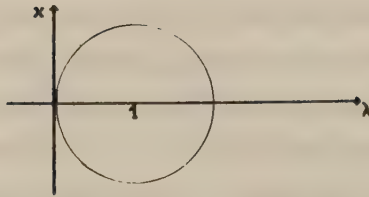
$$f_+ \simeq f|_{\{1\} \times_\epsilon S^{n-1}} \simeq f|_{\{-1\} \times_\epsilon S^{n-1}} \simeq f_-.$$

Weiß man zusätzlich, daß für alle $\lambda \in B^1 - \{0\}$ $f(\lambda, x) = 0$ in einer Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, so müssen die Nullstellen $(\lambda_\epsilon, x_\epsilon)$ gegen $(0, 0)$ konvergieren für $\epsilon \rightarrow 0$. $(0, 0)$ ist also Verzweigungspunkt von $f(\lambda, x) = 0$.

Diese Argumentation ist Teil des Beweises des Satzes von Krasnoselski über Verzweigung von Nullstellen ([32]), der 1956 veröffentlicht wurde. Es ist bekannt, daß Rabinowitz 1971 in [42] aus den gleichen Voraussetzungen eine stärkere Aussage folgern konnte. In der obigen Situation muß sogar eine zusammenhängende Menge $\mathcal{V}$ nichttrivialer Nullstellen von f von $(0, 0)$ abzweigen, die wenigstens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- i) $\mathcal{V}$ ist unbeschränkt (wie im Bild auf S. 3)
- ii) $\mathcal{V}$ kehrt außerhalb von $B^1 \times \{0\}$ zur Menge der trivialen Nullstellen zurück, das heißt $\bar{\mathcal{V}} \cap (\mathbb{R} - B^1) \times \{0\} \neq \emptyset$.

Beispiel für den Fall ii) ist die Nullstellenmenge der Funktion $f(\lambda, x) = x \cdot (x^2 + \lambda^2 - 2\lambda)$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$:



Dieses Phänomen wird als globale Verzweigung bezeichnet im Gegensatz zur lokalen Theorie, die nur etwas über die Nullstellen von f in der Nähe des Verzweigungspunktes aussagt. Globale Aussagen gehören zu den wesentlichen Ergebnissen der topologischen Verzweigungstheorie, denn sie sind mit rein analytischen Methoden nicht zu erzielen. Da das Resultat von Krasnoselski und Rabinowitz zahlreiche Anwendungen fand, versuchte man natürlich in den Jahren danach, es zu verallgemeinern. Ein entscheidender Schritt hierzu war das Paper [4]: "Bifurcation of Zeroes of Parametrized Functions" von Alexander aus dem Jahr 1978. Hier wurde das erste Mal globale Verzweigung bei höherdimensionalem Parameterraum ($k \geq 2$) nachgewiesen. Wesentlicher Unterschied zum Fall $k=1$ ist, daß der Abbildungsgrad keine Information mehr enthält. Dies ist leicht einzusehen. Möchte man etwa Verzweigung vom Ursprung für eine stetige Abbildung $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nachweisen, so setzt man erst einmal voraus, daß in einer Umgebung von $(0,0)$ in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ Verzweigung höchstens vom Ursprung stattfinden kann; das heißt es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle λ mit $0 < \|\lambda\| < \epsilon$ $(\lambda, 0)$ kein Verzweigungspunkt ist. Insbesondere gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $f(\epsilon \cdot S^{k-1} \times \delta \cdot S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$; ohne Einschränkung seien $\epsilon = \delta = 1$. Für alle $\lambda \in S^{k-1}$ induziert f eine Abbildung $f_\lambda: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $f_\lambda(x) := f(\lambda, x) / \|f(\lambda, x)\|$.

Betrachtet man nun die stetige Abbildung

$$\varphi: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{Z}, \lambda \mapsto \deg f_\lambda,$$

so ist klar, daß φ für $k \geq 2$ konstant ist, während man für $k=1$ mit dem Satz von Krasnoselski und Rabinowitz Verzweigung gerade dann nachweisen kann, wenn φ nicht konstant ist. Alexanders Idee besteht nun darin, statt φ die ebenfalls stetige Abbildung

$$\psi: S^{k-1} \rightarrow \mathcal{F}(S^{n-1}, S^{n-1}), \lambda \mapsto f_\lambda,$$

zu betrachten, wobei $\mathcal{F}(S^{n-1}, S^{n-1})$ die Menge der stetigen Abbildungen von S^{n-1} in sich ist, versehen mit der kompakt-offenen Topologie. Er konnte globale Verzweigung nachweisen, wenn ψ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Zum Verständnis dieser Arbeit benötigt man allerdings vertiefte Kenntnisse der algebraischen Topologie (wie stabile Homotopietheorie, den J -Homomorphismus, Poincare-Lefschetz-Dualität) - im Gegensatz zur Arbeit von Rabinowitz, die bis auf den Abbildungsgrad nur Methoden der mengentheoretischen Topologie verwendet (und auch der Abbildungsgrad kann ja rein analytisch definiert werden). Zusammen mit Yorke leitete Alexander dann in [7] mit Hilfe dieses Resultats unter anderem ein hinreichendes Kriterium für globale Hopf-Verzweigung her.

Der Satz von Krasnoselski und Rabinowitz wurde noch in einer anderen Richtung erweitert. Und zwar betrachtet man diesmal nur zwei Punkte $\pm 1 \hat{=} (\pm 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ und setzt voraus, daß $f(\{\pm 1\} \times S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ und $\deg f|_{\{+1\} \times S^{n-1}} \neq \deg f|_{\{-1\} \times S^{n-1}}$. In diesem Fall erhält man sogar eine zusammenhängende Menge $\mathcal{V}$ von Nullstellen, die mindestens k -dimensional ist und von einer mindestens $(k-1)$ -dimensionalen Teilmenge des Parameterraums abzweigt (Alexander und Antman [5], 1981).

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit werden die beiden Resultate von Alexander und Antman in zweifacher Weise verallgemeinert. Zum einen untersuchen wir Verzweigung für Abbildungen f , die auf einer offenen Teilmenge O eines n -dimensionalen Vektorraumbündels E über einer k -dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit Λ definiert sind, also $f: O \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $f|_{(O \cap \text{Nullschnitt})} = 0$. Hier sind die Elemente von $O \cap \text{Nullschnitt}$ die trivialen Lösungen. Man erhält den Fall $O = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, wenn man $\Lambda = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\} \cong S^k$ und $E = \Lambda \times \mathbb{R}^n$ setzt.

Zum zweiten untersuchen wir nicht nur Verzweigung vom Ursprung oder von einer $(k-1)$ -dimensionalen Teilmenge des Parameterraums Λ , sondern von einer r -dimensionalen Teilmenge von Λ , $0 \leq r \leq k-1$ beliebig. (Hier haben wir Λ mit dem Nullschnitt identifiziert.) Diese Allgemeinheit hat verschiedene Konsequenzen. Einmal erfordert die Vektorraumbündelsituation entsprechende Techniken (zum Beispiel den Thom-Isomorphismus). Dann sind globale Deformationen, wie sie Alexander und Antman konstruieren, nur schwer möglich. Dies ist erst recht der Fall, wenn O Löcher hat. Und schließlich ergeben sich Auswirkungen nicht nur auf den Beweis, sondern auch auf die Aussage unseres Verzweigungssatzes: Wir gewinnen einen allgemeineren Begriff von globaler Verzweigung und erhalten außer einer zusammenhängenden Menge nichttrivialer Nullstellen, die von Λ abzweigt, eine weitere diese umfassende, die im allgemeinen nicht zusammenhängend ist. Außerdem können wir zeigen, daß sowohl die abzweigende Menge der Nullstellen als auch die der Verzweigungspunkte topologisch nicht trivial sind (die genaue Formulierung mit Hilfe von Homologietheorien erfolgt in § 1.2). Eine etwas überraschende Folgerung daraus

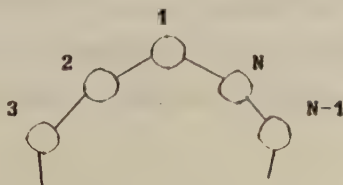
ist, daß die abzweigende Menge von Nullstellen immer zur Menge der trivialen Lösungen zurückkehren muß, wenn 0 den Nullschnitt umfaßt.

In § I.1 beschreiben wir die dem ersten Kapitel zugrundeliegende Situation und motivieren unseren Verzweigungssatz. Dieser wird in § I.2 dargestellt und in § I.3 bewiesen. Den Abschluß des ersten Kapitels in § I.4 bilden Beispiele und Folgerungen aus dem Hauptsatz, falls über die Topologie von Λ und 0 mehr bekannt ist. Gilt etwa für $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(\lambda+1, x) = f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, \quad 1 \in \mathbb{Z}^k, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

so faktorisiert f über $(\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k) \times \mathbb{R}^n$. Sei $T^k := \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ der k -dimensionale Torus und $\bar{f}: T^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die induzierte Abbildung. Ein einfaches Beispiel zeigt, daß unser Verzweigungssatz angewandt auf $\bar{f}$ mehr Information über $f^{-1}(0)$ liefern kann als nur die von $(0,0)$ abzweigende Menge und deren Translationen. Offenbar wird die Symmetrie von f hier ausgenutzt.

Verzweigung von Nullstellen in Anwesenheit von Symmetrien zu untersuchen, soll aber nicht nur durch obige Beobachtung nahegelegt werden. Als Beispiel wählen wir wieder die Hopf-Verzweigung. Es werde etwa eine Zelle bestehend aus m chemischen Reagenzien $R_1, R_2, \dots, R_m$ durch die Differentialgleichung $\dot{x} = \varphi(\mu, x)$ beschrieben; $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ wie oben. x_i sei die Menge des Reagens R_i , $i=1, \dots, m$. Angenommen $N \geq 1$ solcher Zellen sind miteinander gekoppelt - zum Beispiel in einem Ring -, und zwischen benachbarten Zellen diffundieren die Reagenzien.



Diese sogenannten Turing-Ringe werden in der Biomathematik ausgiebig studiert (siehe etwa Alexander/Auchmuty [6], Kopell [30] oder Winfree [52],). Das dazugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= \varphi(\mu, x^1) + D(x^2 - x^1) + D(x^N - x^1), \\ &\vdots \\ \dot{x}^N &= \varphi(\mu, x^N) + D(x^1 - x^N) + D(x^{N-1} - x^N),\end{aligned}$$

$D: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig (Diffusion), ist symmetrisch bezüglich der Operation der Diedergruppe $\mathfrak{D}_N \subset \mathfrak{I}_N$ auf $\mathbb{R}^{N \cdot m}$. Zur Erinnerung: $\mathfrak{D}_N$ wird erzeugt von den Permutationen $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & N-1 & N \\ 2 & 3 & & N & 1 \end{bmatrix}$ und $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & N-1 & N \\ N & N-1 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Die Operation von $\mathfrak{D}_N$ auf $\mathbb{R}^{Nm}$ entspricht gerade den Permutationen der Zellen des Turing-Rings, das heißt $\sigma \cdot (x^1, \dots, x^N) = (x^2, \dots, x^N, x^1)$, $\tau \cdot (x^1, \dots, x^N) = (x^N, \dots, x^1)$. Das Hopf-Verzweigungsproblem für dieses System kann nun so in ein Nullstellenverzweigungsproblem übersetzt werden (allerdings anders, als oben beschrieben), daß die Symmetrien erhalten bleiben. Dies führt zu einer stetigen Abbildung $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die symmetrisch oder äquivariant bezüglich der Operation von $\mathfrak{D}_N$ auf $\mathbb{R}^n$ ist. Im dritten Kapitel untersuchen wir Verzweigung für solche Abbildungen f , wobei allgemeiner statt $\mathfrak{D}_N$ eine beliebige kompakte Lie-Gruppe G zugelassen wird, die linear auf $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^n$ operiert. $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^n$ (und damit $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$) sind also Darstellungsräume von G . Bei der bisher einzigen uns bekannten Arbeit über äquivariante topologische Verzweigung von Ize et al. [29] muß G trivial auf $\mathbb{R}^k$ operieren, das heißt Symmetrien im Parameterraum

werden nicht berücksichtigt. Es stellt sich heraus, daß sich die Methoden des ersten Kapitels ohne größere Schwierigkeiten auf die äquivariante Situation übertragen lassen. Das einzige Problem bei diesem Zugang ist, daß die Hilfsmittel aus der äquivarianten algebraischen Topologie noch nicht so bekannt und auch nicht ganz so weit entwickelt sind, wie es für unsere Anwendungen nötig wäre. Diesen Hilfsmitteln ist das zweite Kapitel gewidmet. In § II.1 stellen wir die benötigten Begriffe und Resultate zusammen, soweit sie bekannt oder relativ einfach zu beweisen sind. In § II.2 versuchen wir, die einzige verbleibende Lücke zu schließen, was uns aber leider nur für den Fall G endlich gelingt (Vermutung II.2.9 und Satz II.2.10). Das hat zur Folge, daß wir im äquivarianten Verzweigungssatz die Aussage über die Dimension der Verzweigungsmenge nur modulo Vermutung II.2.9 beweisen können.

Mein Dank geht an meinen Doktorvater Herrn Prof. H. Steinlein, der mich sowohl zu den Verallgemeinerungen des ersten Kapitels als auch zur Beschäftigung mit der äquivarianten Verzweigungstheorie anregte. Bei der Studienstiftung des deutschen Volkes bedanke ich mich für die Finanzierung eines Studienjahres an der University of Chicago, ohne das die Kapitel II und III wohl nicht zustande gekommen wären.

KAPITEL I. VERZWEIGUNG IN VEKTORRAUMBÜNDELN

§ 1. Einführung

In diesem Paragraphen wird die dem gesamten Kapitel I zugrundeliegende Situation beschrieben und verschiedene Aspekte des Hauptsatzes über Verzweigung von Nullstellen motiviert, insbesondere dessen Voraussetzung. Dabei wird eine gewisse Vertrautheit mit Mannigfaltigkeiten und Vektorraumbündeln etwa im Umfang von Bröcker/Jänich [12] oder Lang [33] vorausgesetzt; darüber hinausgehende Sätze und Begriffe sind im Anhang zusammengestellt.

Sei Λ eine geschlossene (d. h. kompakte und randlose), zusammenhängende, orientierbare C^1 -Mannigfaltigkeit; $k := \dim \Lambda \in \mathbb{N}$. (E, p, Λ) sei ein n -dimensionales orientierbares C^1 -Vektorraumbündel über Λ , $n \in \mathbb{N}$. Λ wird identifiziert mit dem Nullschnitt E_0 , also $p: E \rightarrow E_0$. Weiter sei $O \subset E$ offen, $O_0 := O \cap E_0 \neq \emptyset$ und $f: O \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $f|_{O_0} = 0$.

Wir wollen die Nullstellenmenge von f , d. h. die Menge der $v \in O$ mit $f(v) = 0$ untersuchen. Die Elemente von O_0 heißen triviale Nullstellen, Λ wird als Parameterraum angesehen. Uns interessiert die Frage, unter welchen Bedingungen an f eine Menge $\mathcal{Y}$ nichttrivialer Nullstellen von O_0 abzweigt. Außerdem möchten wir Aussagen über die Struktur von $\mathcal{Y}$ gewinnen, zum Beispiel über Dimension und Lage in O . Dabei sollen die Voraussetzungen lokaler Art, die Folgerungen aber globaler Art sein.

Sei dazu $\lambda_0 \in O_0$ fest. Um λ_0 gibt es eine Vektorraumbündelkarte

$$\kappa: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(M),$$

wobei N eine offene Umgebung von λ_0 in E_0 sowie $\kappa(0,0) = \lambda_0$ und $\kappa(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = N$ ist. Es gilt nicht notwendig $p^{-1}(N) \subset O$.

Mit Hilfe von κ identifizieren wir $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ mit $p^{-1}(N)$, betrachten dabei $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ als Teilmenge von E , ohne κ im folgenden explizit zu erwähnen. Wir schreiben also auch $f(\lambda, x)$ statt $f(\kappa(\lambda, x))$, falls $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $\kappa(\lambda, x) \in O$. Ohne Einschränkungen sei

$$B^k \times B^n = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n : \|\lambda\|, \|x\| \leq 1\} \subset O.$$

Es gebe nun ein $l \in \{1, \dots, k\}$, so daß in einer Umgebung von

$$B^{l-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^l \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k$$

in O nur triviale Nullstellen liegen. Insbesondere können wir ohne Einschränkungen annehmen, daß

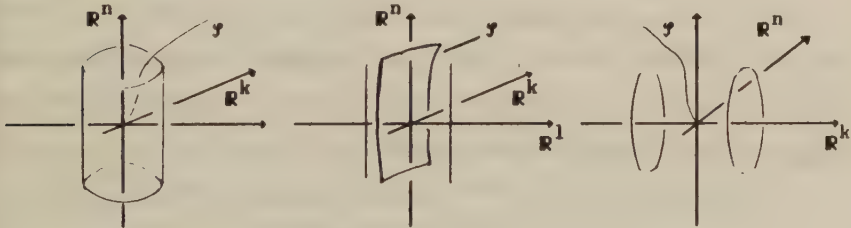
$$f(\lambda, x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad (\lambda, x) \in S^{l-1} \times (B^n - \{0\});$$

sonst modifizieren wir die Karte geeignet.

$$n=1, k=l=2$$

$$n=1, k=2, l=1$$

$$n=2, k=l=1$$



Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{l-1} \times S^{n-1} & \xrightarrow{i_1} & O - f^{-1}(0) \\ f \searrow & & \swarrow f \\ & \mathbb{R}^n - \{0\} & \end{array}$$

Die Idee ist nun, daß wir Verzweigung einer $(k-l+1)$ -dimensionalen Menge nichttrivialer Nullstellen erhalten, wenn

$$f|_S : S^{l-1} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

und damit die Einbettung i , "wesentlich" ist. Zur Motivation dieser Idee und zur Erläuterung von "wesentlich" sei an das bekannte Ergebnis von Krasnoselski [32] erinnert. Bei ihm ist $k=1$, und

$$f|: S^0 \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1}$$

läßt sich nicht nullstellenfrei erweitern auf $B^1 \times S^{n-1}$, d. h. die Abbildungsgrade von $f|_{\{1\} \times S^{n-1}}$ und $f|_{\{-1\} \times S^{n-1}}$ sind verschieden (f wesentlich). Das gegebene f ist natürlich eine Erweiterung, besitzt also eine Nullstelle in $B^1 \times S^{n-1}$. Krasnoselskis Voraussetzungen an f waren derart, daß er dies zeigen konnte für $\epsilon \cdot (B^1 \times S^{n-1})$ und $\epsilon > 0$ beliebig klein. Er erhielt also in jeder Umgebung von $(0,0)$ nichttriviale Nullstellen von f , das heißt er konnte lokale Verzweigung nachweisen.

Falls eine Erweiterung $f': B^1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ existiert, so kann f' weiter zu einer Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erweitert werden, ohne daß Verzweigung stattfindet. Das bedeutet, daß das Datum $f|: S^{l-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ für den Nachweis von (globaler oder lokaler) Verzweigung nicht ausreicht. Dazu erweitere man f' zuerst zu $f'': B^k \times B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$f''(\lambda, x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \|x\| \cdot f'(p(\lambda), x/\|x\|) & x \neq 0 \end{cases}$$

wobei $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ die Projektion auf die ersten 1 Koordinaten ist. Dann wird f'' radial erweitert auf $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ zu

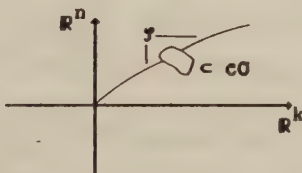
$$\tilde{f}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{f}(\lambda, x) := f''(r(\lambda), r'(x)),$$

wobei $r: \mathbb{R}^k \rightarrow B^k$, $r': \mathbb{R}^n \rightarrow B^n$ die radialen Retraktionen sind, $r^{-1}(0) = \{0\}$, $r'^{-1}(0) = \{0\}$. Die Stetigkeit von $\tilde{f}$ ist klar, ebenso daß $\tilde{f}^{-1}(0) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Um globale Verzweigung zu erhalten, werden wir die Bedingung "f wesentlich" etwas schwächer als oben mit Hilfe einer (verallgemeinerten) Homologietheorie h_* formulieren. Verallgemeinert heißt, daß h_* das Dimensionsaxiom nicht erfüllen muß. Wir werden den Zusatz im folgenden weglassen.

Während sich die lokale Theorie vermöge unserer Karte κ auf den Fall $O = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ zurückführen läßt, sind bei globalen Aussagen neue Phänomene zu beobachten. Zum Beispiel kann O Löcher enthalten, das heißt die folgende Situation kann vorkommen:

$n=1, k=1$



Während bisher immer nur die Existenz einer zusammenhängenden Menge nichttrivialer Nullstellen nachgewiesen wurde, die von O_0 abzweigt, untersuchen wir auch Nullstellenmengen, die in allgemeinerer Weise von O_0 abzweigen. Wir werden zwei Mengen

$$\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}_1 \subset f^{-1}(0) - O_0$$

erhalten, die im allgemeinen verschieden sind und von denen nur $\mathcal{Y}_2$ zusammenhängend sein muß.

Der Fall $\mathcal{Y}_1 \neq \mathcal{Y}_2$ kann schon für $O \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \subset S^k \times \mathbb{R}^n = E$ vorkommen. Umfaßt O dagegen den ganzen Nullschnitt ($O_0 = E_0$), so können wir zeigen, daß die abzweigende Menge $\mathcal{Y}_1$ immer zur Menge der trivialen Nullstellen zurückkehren muß - was für $O \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ sicher falsch ist.

§ 2. Der Hauptsatz über Verzweigung in Vektorraumbündeln

Bevor wir unseren Hauptsatz formulieren können, benötigen wir noch zwei Begriffe.

2.1 Definition: Sei X topologischer Raum. Dann definieren wir die (kleine induktive) Dimension von X durch:

$$\dim X = -1 \quad :\Leftrightarrow \quad X = \emptyset$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in X$ sei

$$0 \leq \dim_x X \leq n \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ hat beliebig kleine Umgebungen } U \text{ mit } \dim \operatorname{rd}(U) \leq n-1$$

$$\dim X \leq n \quad :\Leftrightarrow \quad \dim_x X \leq n \quad \text{für alle } x \in X.$$

$$\dim X = n \quad :\Leftrightarrow \quad \dim X \leq n \quad \text{und} \quad \dim X > n-1$$

$$\dim X = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall n \geq -1: \dim X > n$$

Für einen separablen metrischen Raum - andere werden wir nicht betrachten - stimmt diese kleine induktive Dimension mit der Überdeckungsdimension überein (vergleiche Hurewicz/Wallman [21] Theorem V.8).

2.2 Definition: Eine Homologietheorie h_* heißt zulässig, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt.

- (i) h_* ist darstellbar mit Hilfe eines kommutativen Ring-spektrums.
- (ii) h_* ist zusammenhängend; das heißt, ist P einpunktiger Raum, so ist $h_n(P) \cong \{0\}$ für alle $n < 0$.

Die Erläuterung der Begriffe in Definition 2.2 sowie die aller folgenden Begriffe der algebraischen Topologie ist im Anhang

A.1 zu finden. Die für Anwendungen wichtigen Homologietheorien $H_*(.;\mathbb{Z})$, singuläre Homologietheorie, und ω_* , stabile Homotopie, sind zulässig. Zu einer zulässigen Homologietheorie h_* gehört eine Kohomologietheorie h^* und eine Čech-Kohomologietheorie $\check{h}^*$ ebenso wie die reduzierten Theorien $\tilde{h}_*$ und $\tilde{h}^*$.

$h^*(P) \cong \tilde{h}^*(S^0) \cong \tilde{h}_*(S^0) \cong h_*(P)$ - genauer gilt $h^n(P) \cong h_{-n}(P)$ - ist ein Ring mit $1 \in h^0(P) \cong h_0(P)$. Diese 1 induziert per Einhängung Elemente $1_r \in \tilde{h}_r(S^r)$ für alle $r \geq 0$ und somit auch Elemente

$$\Sigma_r \triangleq (1_r, 0) \in \tilde{h}_r(S^r) \otimes h_r(P) \cong h_r(S^r).$$

Betrachtet man die reduzierte exakte Sequenz von (B^{r+1}, S^r) , so erhält man ein eindeutig bestimmtes Element Δ_{r+1} in

$h_{r+1}(B^{r+1}, S^r)$ mit $\partial \Delta_{r+1} = \Sigma_r$. Das $\times$ -Produkt liefert Elemente $\Sigma_r \times \Sigma_s$ in $h_{r+s}(S^r \times S^s)$ und $\Delta_{r+1} \times \Sigma_s$ in $h_{r+s+1}(B^{r+1} \times S^s, S^r \times S^s)$.

Wir betrachten nun $f: O \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $O \subset E$ offen, wie in § 1.

Zusätzlich zur Abbildung

$$i_1: S^{l-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow O - f^{-1}(0)$$

führen wir noch die Einbettung

$$i_2: (B^l \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) \hookrightarrow (O - O_0, O - f^{-1}(0))$$

ein.

2.3 Hauptsatz: Falls es eine zulässige Homologietheorie h_*

gibt, so daß für die von f induzierte Abbildung

$$f_*: h_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow h_{l+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

gilt: $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$,

dann gibt es abgeschlossene Teilmengen $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ von $f^{-1}(0) - O_0$

mit $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}_1$ und für die gilt:

$$i_1(\mathcal{Y}_1): S^{l-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow O - (\mathcal{Y}_1 \cup O_0) \quad \text{und}$$

$$i_2(\mathcal{Y}_2): (B^l \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) \hookrightarrow (O - O_0, O - (\mathcal{Y}_2 \cup O_0))$$

induzieren auf Homologieniveau Homomorphismen mit

$$(*) \quad \begin{aligned} i_1(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) &\neq 0 \\ i_2(\mathcal{Y}_2)_*(\Delta_l \times \Sigma_{n-1}) &\neq 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ sind minimal bezüglich dieser Bedingungen.

Insbesondere besitzen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ die folgenden Eigenschaften (der Abschluß $\bar{\mathcal{F}}_1, \bar{\mathcal{F}}_2$ von $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ wird bezüglich E gebildet).

a) $(0,0) \hat{=} \lambda_0 \in \bar{\mathcal{F}}_2 \subset \bar{\mathcal{F}}_1$

b) $\mathcal{F}_2$ ist zusammenhängend

$\mathcal{F}_1$ oder $\mathcal{F}_1 \cup \{c\}$ ist zusammenhängend, wobei $c \in \mathcal{O}$ kompaktifiziert

c) $\dim_v \mathcal{F}_i \geq k-1+1$ an jedem Punkt $v \in \mathcal{F}_i, i=1,2$

d) Für $i=1,2$ induziert die Einbettung

$$e_i: S^{1+n-1} \cong S := \text{rd}(B^1 \times B^n) \hookrightarrow (E-(\bar{\mathcal{F}}_i - \mathcal{F}_i), E-\bar{\mathcal{F}}_i)$$

einen Homomorphismus

$$e_{i*}: h_{1+n-1}(S^{1+n-1}) \cong h_{1+n-1}(S) \rightarrow h_{1+n-1}(E-(\bar{\mathcal{F}}_i - \mathcal{F}_i), E-\bar{\mathcal{F}}_i)$$

mit $e_{i*}(\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$.

Insbesondere gilt wenigstens eine der beiden folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}_i$ ist in keiner kompakten Teilmenge von $\mathcal{O}$ enthalten

ii) Die Einbettung

$$d_i: S^{1-1} \hookrightarrow \Lambda - \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_i := \bar{\mathcal{F}}_i \cap \mathcal{O}_0,$$

induziert einen Homomorphismus

$$d_{i*}: h_{1-1}(S^{1-1}) \rightarrow h_{1-1}(\Lambda - \mathcal{F}_i)$$

mit $d_{i*}(\Sigma_{1-1}) \neq 0$. (Dies impliziert $\mathcal{F}_i \cap (\Lambda - B^1) \neq \emptyset$.)

e) Für $i=1,2$ gibt es abgeschlossene Teilmengen $\mathcal{F}'_i$ von $\mathcal{F}_i$ mit

$$\dim_\lambda \mathcal{F}'_i \geq k-1 \quad \text{an jedem Punkt } \lambda \in \mathcal{F}'_i,$$

so daß gilt:

Die Einbettungen

$$c_1: S^{1-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_1 \quad \text{und}$$

$$c_2: (B^1, S^{1-1}) \hookrightarrow (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_2)$$

induzieren Homomorphismen

$$c_{1*}: h_{1-1}(S^{1-1}) \longrightarrow h_{1-1}(O_0 - \mathcal{F}'_1) \quad \text{und}$$

$$c_{2*}: h_1(B^1, S^{1-1}) \longrightarrow h_1(O_0, O_0 - \mathcal{F}'_2)$$

mit $c_{1*}(\Sigma_{1-1}) \neq 0$ und $c_{2*}(\Delta_1) \neq 0$.

f) $\overline{\mathcal{F}}_2 \subset O$ kompakt $\Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$

g) $O \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und $O_0 \cong \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$

Der Satz wird in § 3 bewiesen. Beispiele (etwa für $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$) folgen in § 4. Dort finden sich auch weitergehende Resultate für spezielle Fälle wie etwa $O_0 = \Lambda$ oder $O \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$.

2.4 Bemerkungen: a) Im Hauptsatz wurde die Eigenschaft (*) von

$i_1(\mathcal{F}_1)$ beziehungsweise $i_2(\mathcal{F}_2)$ als zentral hingestellt, aus der alles weitere folgt. Dies entspricht der in § 1 geschilderten Idee, daß wir nur die Einbettung

$$i_1: S^{1-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow O - f^{-1}(0)$$

betrachten müssen, wenn wir Verzweigung nachweisen wollen.

b) Es ist naheliegend, auch die Einbettung

$$i_1(\mathcal{F}): (B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) \hookrightarrow (O, O - (O_0 \cup \mathcal{F}))$$

für $\mathcal{F} \subset f^{-1}(0) - O_0$ zu betrachten. Man erhält dann eine minimale Menge $\mathcal{F}$, mit $i_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$, die so konstruiert werden kann, daß gilt: $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$. Sie ist im allgemeinen von $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_1$ verschieden, doch es gilt:

$$O \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$$

$$O_0 \cong \mathbb{R}^k \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$$

$\mathcal{F}$, muß nicht zusammenhängend sein. Da $\mathcal{F}$, zwischen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ liegt und bis auf den fehlenden Zusammenhang die gleichen Eigenschaften a) - e) wie $\mathcal{F}_2$ besitzt, haben wir $\mathcal{F}$, nicht zusätzlich aufgeführt.

- c) Aussage e) ist eine Art Verkettungseigenschaft von S^{l-1} und der Menge $\mathcal{T}'_1$ beziehungsweise $\mathcal{T}'_2$. Im Fall $l=1$ besagt sie, daß $\mathcal{T}'_1$ (und damit auch $\mathcal{T}_1$) die beiden Punkte der S^0 trennt in O_0 , und im Fall $k=3, l=2$, daß $\mathcal{T}'_1$ die Menge B^2-S^1 durchstößt und entweder gegen den Rand von O_0 in Λ strebt oder aber mit S^1 ähnlich verkettet ist wie zwei ineinanderhängende Ringe. Die Aussage über $\mathcal{T}_2$ ist etwas schwächer. In § 4 findet sich ein Beispiel dafür, daß $\mathcal{T}_2$ nicht die stärkere Eigenschaft von $\mathcal{T}_1$ besitzen muß. Außerdem gilt die Dimensionsaussage im allgemeinen nicht schon für $\mathcal{T}_1$ oder $\mathcal{T}_2$ (siehe Bemerkung 3.9).
- d) Entsprechendes gilt für $S = \text{rd}(B^l \times B^n)$ und $\bar{\mathcal{T}}_i - \mathcal{T}_i, i=1,2$. Hier folgt aus 2.3d) sogar, daß sich S nicht in das Komplement von $\bar{\mathcal{T}}_i$ deformieren läßt, ohne $\bar{\mathcal{T}}_i - \mathcal{T}_i$ zu berühren.
- e) Die Voraussetzung $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ läßt sich im Anschluß an § 1 leicht motivieren. Falls nämlich eine Erweiterung $g: B^l \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ von $f|_{S^{l-1} \times S^{n-1}}$ existiert, so gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1} \in h_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{f_*} & h_{l+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 \uparrow & & \uparrow \partial \\
 \Delta_1 \times \Sigma_{n-1} \in h_{l+n-1}(B^l \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{g_*} & h_{l+n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 & & \downarrow \partial \\
 & & \{0\}
 \end{array}$$

Es folgt somit: $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) = 0$.

Oder umgekehrt:

$f_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt keine nullstellenfreie

Erweiterung von $f|S^{1-1} \times S^{n-1}$ auf $B^1 \times S^{n-1}$

- f) Die Voraussetzungen an (E, p, Λ) können etwas abgeschwächt werden. Wir benötigen im wesentlichen nur, daß es eine orientierbare Mannigfaltigkeit E^+ gibt, die O enthält, mit $E^+ - O$ kompakt. In unserem Fall wird dies die fasernweise Ein-Punkt-Kompaktifizierung von E sein (siehe Anhang A.3). Für $O \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und $\Lambda = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\} \cong S^k$ wäre dies $S^k \times S^n$. Wir könnten aber statt dessen auch genauso gut mit $S^{k+n} \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ arbeiten.

Auch die Voraussetzung der Orientierbarkeit von Λ , E (und damit E^+) kann ersetzt werden durch Orientierbarkeit bezüglich h_* . Gilt etwa $f_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ sogar für $h_* \otimes \mathbb{Z}_2$ statt h_* , so geht der Beweis von Satz 2.3 durch, da alle Mannigfaltigkeiten bezüglich $h_* \otimes \mathbb{Z}_2$ orientierbar sind.

Ist Λ eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, so können die Beweismethoden übertragen werden. Die globalen Aussagen müssen natürlich umformuliert werden.

Weiter ist es möglich, $\mathbb{R}^n$ durch einen Banachraum B zu ersetzen, falls f geeignet approximiert werden kann: zum Beispiel $O \subset \mathbb{R}^k \times B$ und $f(\lambda, x) = x + C(\lambda, x)$, C kompakt. Die dafür notwendigen Änderungen sind allerdings nicht trivial; insbesondere müssen Argumente auf Homologieniveau "dualisiert" werden, so daß wir statt mit h_* mit h^* arbeiten.

2.5 Vergleich mit bekannten Resultaten: In allen bisher veröffentlichten Arbeiten ist der Parameterraum ein euklidischer Raum $\mathbb{R}^k$ und Σ ein Produkt von $\mathbb{R}^k$ mit einem weiteren euklidischen Raum (oder allgemeiner von Banachräumen). Die Bündelsituation wurde also noch nicht betrachtet. Für die folgenden Vergleiche beschränken wir uns daher auf den euklidischen Fall.

- a) Ist $l=k$, so sind wir in der Situation von Alexander [4], der das klassische Resultat von Rabinowitz [42], dort war $l=k=1$, verallgemeinert. Alexander führt die Frage nach Verzweigung ebenfalls auf die Bedingung $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ zurück. Die Verzweigungsmenge, die er erhält, ist die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{Y}_2$ in $f^{-1}(0) - B^1$. Überträgt man seinen Beweis auf unsere Situation, so erfüllt die entsprechende Verzweigungsmenge im allgemeinen nicht die Dimensionsbedingung.
- b) Im Fall $l=1$ sind wir in der Situation von Alexander und Antman [5], die allerdings zusätzlich voraussetzen, daß $\Sigma \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und $\Sigma_0 \cong \mathbb{R}^k$ ist. Somit ist bei ihnen $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$. Sie konstruieren eine Abbildung

$$e: (\bar{\mathcal{Y}}U(\infty))/(\mathcal{Y}U(\infty)) \longrightarrow S^k, \quad \mathcal{Y} = \bar{\mathcal{Y}} \cap \Sigma_0,$$

(wobei $\infty \in \Sigma$ kompaktifiziert), die einen nichttrivialen Homomorphismus

$$e^*: Z \cong H^k(S^k; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k((\bar{\mathcal{Y}}U(\infty))/(\mathcal{Y}U(\infty)); \mathbb{Z})$$

induziert. Daraus gewinnen sie dann ähnliche Aussagen wie a) - e). Dieser Beweis läßt sich auch auf die Situation $l>1$ übertragen, allerdings nur falls $\Sigma \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und $\Sigma_0 \cong \mathbb{R}^k$ ist. Der in § 3 folgende Beweis kommt ohne die

Konstruktion der Abbildung e aus, die ja sowieso nur ein Hilfsmittel ist, Aussagen über $\mathcal{F}$ zu gewinnen.

Kapitel I dieser Arbeit ist entstanden aus dem Versuch, die Ergebnisse von Alexander und Antman auf den Fall beliebiges Q und beliebiges l zu übertragen.

- c) Ganz andere Methoden benutzen Ize/Massabó/Pejsachowicz/Vignoli [28], um nicht mit Homologietheorien arbeiten zu müssen. Sie führen dazu den Begriff "0-epi" für bestimmte Abbildungen ein, der mit Hilfe der Existenz oder Nichtexistenz von Erweiterungen formuliert ist. Dieser Begriff ist zwar elementar in dem Sinn, daß algebraische Topologie nicht benötigt wird; er ist aber technisch durchaus kompliziert. Und um die Eigenschaft "0-epi" nachzuweisen, kommen sie in [28], Proposition 4.5, auf dieselbe Bedingung wie wir in Satz 2.6, womit sie ebenfalls auf Homologieniveau sind. Sie betrachten auch beliebiges l und Q , erhalten aber nur die Menge $\mathcal{F}_2$, für die sie die Aussagen a) - c) sowie eine schwächere Form von d) nachweisen. Eine Eigenschaft e) entsprechende Aussage erhalten sie nur im Fall $l=1$ und Q_0 konvex.

Nach Satz 2.3 ist es nun natürlich wichtig, die Voraussetzung $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ für eine möglichst große Klasse von Abbildungen f nachzuweisen.

Sei dazu $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in § 1 mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß für alle $\lambda \in S^{l-1}$ $L(\lambda) = D_x f(\lambda, 0)$ existiert, nicht singulär ist und stetig von λ abhängt. Dabei bedeutet " $L(\lambda) = D_x f(\lambda, 0)$ existiert" natürlich

$$f(\lambda, x) = L(\lambda) \cdot x + o(\|x\|) \quad \text{für} \quad \|x\| \rightarrow 0.$$

Dann induziert die (nach Voraussetzung stetige) Abbildung

$$L: S^{1-1} \longrightarrow GL(n), \lambda \mapsto D_x f(\lambda, 0),$$

ein Element $\gamma = \gamma_f \in \pi_{1-1}(GL(n))$ und somit $\gamma^s \in \pi_{1-1}(GL)$ - die Stabilisierung von γ ; $GL = \operatorname{colim}_{r \rightarrow \infty} GL(r)$, induziert von den kanonischen Einbettungen $GL(r) \hookrightarrow GL(r+1)$, $\lambda \mapsto \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ist $* = (1, 0, \dots, 0) \in S^{1-1}$ der Basispunkt von S^{1-1} , so können wir ohne Einschränkungen $L(*) = \operatorname{Id}_{GL(n)}$ annehmen; sonst ersetzen wir f durch $L(*)^{-1} \cdot f$, das dieselbe Nullstellenmenge besitzt. Es gilt:

$$f_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \iff (L(*)^{-1} \cdot f)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0.$$

Basispunkt von $GL(n)$ und von GL sei also Id .

Sei $J: \pi_{1-1}(GL) \longrightarrow \pi_{1-1}^s$ der stabile J-Homomorphismus (siehe Anhang A.2).

2.6 Satz: $J\gamma^s \neq 0 \Rightarrow f_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ für

$$f_*: \omega_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow \omega_{1+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Das heißt die Voraussetzung von Satz 2.3 ist erfüllt mit

$h_* = \omega_*$, der stabilen Homotopietheorie.

Zusatz: Im Fall $l=1$ gilt das auch mit $H_*(.; \mathbb{Z})$, der singulären Homologietheorie statt ω_* .

Der Beweis folgt ebenfalls in § 3.

2.7 Bemerkung: a) Der J-Homomorphismus kommt an dieser Stelle vielleicht etwas überraschend. Man möge allerdings bedenken, daß der erste Schritt zur Konstruktion von $J\gamma^s$ der Übergang zur Abbildung

$$F: S^{1-1} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}, F(\lambda, x) := L(\lambda) \cdot x$$

ist. Diese Abbildung stellt eine Verbindung her zwischen $f|S^{1-1} \times S^{n-1}$ und $J\gamma^s$.

Eine weitere Motivation liefert die folgende Beobachtung. Sei dazu $l < n-1$. Dann ist $\pi_{l-1}^s \cong \pi_{l+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\})$.

Die Hindernisse zur nullstellenfreien Erweiterung von $f|_{S^{l-1} \times S^{n-1}}$ auf $B^1 \times S^{n-1}$ liegen in

$$H^{l+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}; \pi_{l+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\})) \cong \pi_{l-1}^s.$$

Es ist nun nicht sehr schwierig zu zeigen, daß $J\gamma^s$ das einzige Hindernis ist.

- b) Ist $l=1$, so ist $J: \pi_0(GL) \longrightarrow \pi_0^s$ injektiv (siehe nach Definition A.2.1) und $\pi_0(GL) \cong \pi_0(GL(n)) \cong \mathbb{Z}_2$.

Es gilt $\gamma = \gamma^s \neq 0$ genau dann, wenn

$$\text{sign det } L(-1) \neq \text{sign det } L(1) = 1,$$

das heißt (siehe Lemma 3.13) wenn

$$f_+ := f|_{\{1\} \times S^{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \cong S^{n-1} \quad \text{und}$$

$$f_- := f|_{\{-1\} \times S^{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \cong S^{n-1}$$

verschiedene Abbildungsgrade haben - wobei wir für $n=1$ den Abbildungsgrad mit Hilfe der reduzierten Homologie von S^0 definieren. Sind umgekehrt die beiden Abbildungsgrade von f_+ und f_- gleich, so ist $f_+ \cong f_-$, das heißt es gibt eine Erweiterung von $f|_{S^0 \times S^{n-1}}$ auf $B^1 \times S^{n-1}$.

§ 3. Beweis der Sätze 2.3 und 2.6

Wir beginnen mit dem Beweis von Satz 2.3.

Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_{1+n-2}(O-f^{-1}(0)) \\ & \searrow f_* & \swarrow f_* \\ & h_{1+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \end{array}$$

kommutiert, folgt aus $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ offensichtlich $i_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$. Dies ist eine starke topologische Bedingung an $f^{-1}(0)$, aus der die Existenz der Verzweigungsmengen folgen wird.

Für $\mathcal{V} \subset f^{-1}(0) - O_0$ setzen wir

$$i_1(\mathcal{V}): S^{1-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow O - (\mathcal{V} \cup O_0).$$

Weiter sei

$$\mathcal{M}_1 := \{\mathcal{V} \subset f^{-1}(0) - O_0: \mathcal{V} \text{ abgeschlossen in } f^{-1}(0) - O_0,$$

$$i_1(\mathcal{V})_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0\}$$

$\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$, da $f^{-1}(0) - O_0 \in \mathcal{M}_1$: $i_1(f^{-1}(0) - O_0) = i_1$.

$\mathcal{M}_1$ ist teilweise geordnet durch Inklusion. Wir wollen mit Hilfe des Lemmas von Zorn ein minimales Element von $\mathcal{M}_1$ erhalten. Dazu benötigen wir die fasernweise Ein-Punkt-Kompaktifizierung E^+ von E (siehe im Anhang A.3.1, A.3.2). E^+ ist eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit.

3.1 Lemma: $\mathcal{M}_1$ ist nach unten induktiv geordnet.

Beweis: Sei $(\mathcal{V}_\kappa)_{\kappa \in K}$ Kette. Zu zeigen ist die Existenz einer unteren Schranke in $\mathcal{M}_1$.

Behauptung: $\mathcal{F}_K := \bigcap_{\kappa \in K} \mathcal{F}_\kappa$ ist untere Schranke.

Offensichtlich gilt $\mathcal{F}_K \subset \mathcal{F}_\kappa$ für alle $\kappa \in K$.

Bleibt zu zeigen: $\mathcal{F}_K \in \mathcal{M}_1$.

Klar ist, daß $\mathcal{F}_K \subset f^{-1}(0) - \mathcal{O}_0$ relativ abgeschlossen ist.

Wir betrachten nun für beliebiges $\kappa_0 \in K$ das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
 h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_1(\mathcal{F}_K)_*} & h_{1+n-2}(\mathcal{O} - (\mathcal{F}_K \cup \mathcal{O}_0)) \\
 \downarrow i_1(\mathcal{F}_{\kappa_0})_* & \nearrow j_*^{\kappa_0} & \uparrow \alpha \\
 h_{1+n-2}(\mathcal{O} - (\mathcal{F}_{\kappa_0} \cup \mathcal{O}_0)) & \xrightarrow{c_{\kappa_0}} & \operatorname{colim}_{\kappa \in K} h_{1+n-2}(\mathcal{O} - (\mathcal{F}_\kappa \cup \mathcal{O}_0))
 \end{array}$$

Hier ist $j_*^{\kappa_0}$ Einbettung; der Kolimes (direkter Limes) kommt von dem direkten System

$$c_{\kappa'}^{\kappa_0}: h_{1+n-2}(\mathcal{O} - (\mathcal{F}_\kappa \cup \mathcal{O}_0)) \longrightarrow h_{1+n-2}(\mathcal{O} - (\mathcal{F}_\kappa \cup \mathcal{O}_0)),$$

von der Einbettung $\mathcal{F}_\kappa \hookrightarrow \mathcal{F}_\kappa$, induziert ($\kappa' \leq \kappa \Leftrightarrow \mathcal{F}_\kappa \subset \mathcal{F}_{\kappa'}$).

$c_{\kappa_0}^{\kappa_0}$ ist die kanonische Abbildung in den Kolimes.

$\alpha := \operatorname{colim} j_*^{\kappa}$ ist ein Isomorphismus nach A.1.5, wobei wir die beteiligten Mengen als (offene) Teilmengen von E^+ auffassen.

Wir haben zu zeigen:

$$i_1(\mathcal{F}_K)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0.$$

Das ist aber genau dann der Fall, wenn

$$\alpha^{-1} i_1(\mathcal{F}_K)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) = c_{\kappa_0}^{\kappa_0} \circ i_1(\mathcal{F}_{\kappa_0})_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0.$$

Dies folgt nun nach der Definition des direkten Limes aus

$$c_{\kappa}^{\kappa_0} \circ i_1(\mathcal{F}_{\kappa_0})_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) = i_1(\mathcal{F}_\kappa)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$$

für alle $\kappa \geq \kappa_0$ ($\mathcal{F}_\kappa \subset \mathcal{F}_{\kappa_0}$).

Letzteres gilt aber wegen $\mathcal{F}_\kappa \in \mathcal{M}_1$ für alle $\kappa \in K$. ■

Nach dem Zornschen Lemma besitzt M_1 ein minimales Element $\mathcal{Y}_1$.

Um $\mathcal{Y}_2$ zu erhalten, ersetzen wir $i_1(\mathcal{Y})$ durch

$$i_2(\mathcal{Y}): (B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) \hookrightarrow (0-0_0, 0-(\mathcal{Y} \cup 0_0))$$

und M_1 durch

$$M_2 := \{\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_1: \mathcal{Y} \text{ abgeschlossen in } \mathcal{Y}_1, i_2(\mathcal{Y})_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0\}.$$

$M_2 \neq \emptyset$ wegen $\mathcal{Y}_1 \in M_2$:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 \times \Sigma_{n-1} \in h_{1+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_2(\mathcal{Y}_1)_*} & h_{1+n-1}(0-0_0, 0-(\mathcal{Y}_1 \cup 0_0)) \\ \downarrow & & \downarrow \partial \\ \Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1} \in h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_1(\mathcal{Y}_1)_*} & h_{1+n-2}(0-(\mathcal{Y}_1 \cup 0_0)) \end{array}$$

$$i_1(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow i_2(\mathcal{Y}_1)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0.$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.1 zeigt man, daß M_2 nach unten induktiv geordnet ist bezüglich " $\subset$ ". Sei $\mathcal{Y}_2$ ein minimales Element von M_2 . $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$ sind die im Hauptsatz erwähnten Verzweigungsmengen. Per definitionem sind sie bezüglich

$$i_1(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$i_2(\mathcal{Y}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$$

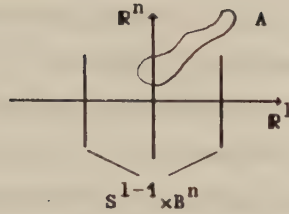
minimale abgeschlossene Teilmengen von $f^{-1}(0)-0_0$.

$\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}_1$ gilt wegen $\mathcal{Y}_2 \in M_2$. Nun kommen wir zum Nachweis der Eigenschaften a) - g).

3.2 Lemma: Sei $A \subset E$ mit $\bar{A} \cap (S^{1-1} \times B^n \cup B^1 \times \{0\}) = \emptyset$. Dann induziert

$$i: (B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) \hookrightarrow (B^1 \times (B^n - \{0\}), B^1 \times (B^n - \{0\}) - A)$$

auf h_* -Niveau einen Homomorphismus i_* mit $i_* = 0$.



Beweis: Es gibt $\rho > 0$, so daß $B^1 \times \rho \cdot S^{n-1} \subset B^1 \times (B^n - \{0\}) - A$.

Das Diagramm $(S^{l-1} := \rho \cdot S^{l-1})$

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda, x) \in (B^1 \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i} & (B^1 \times (B^n - \{0\}), B^1 \times (B^n - \{0\}) - A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\lambda, \rho x) \in (B^1 \times S_{\rho}^{n-1}, S_{\rho}^{l-1} \times S_{\rho}^{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & (B^1 \times S_{\rho}^{n-1}, B^1 \times S_{\rho}^{n-1})
 \end{array}$$

kommutiert bis auf Homotopie. Auf h_* -Niveau folgt $i_* = 0$ aus $h_*(B^1 \times S_{\rho}^{n-1}, B^1 \times S_{\rho}^{n-1}) \cong \{0\}$. ■

3.3 Proposition: $(0, 0) \hat{=} \lambda_0 \in \bar{\mathcal{Y}}_2 \subset \bar{\mathcal{Y}}_1$.

Beweis: Wäre $(0, 0) \notin \bar{\mathcal{Y}}_2$, so folgte $\bar{\mathcal{Y}}_2 \cap (S^{l-1} \times B^n \cup B^1 \times \{0\}) = \emptyset$. Dann wäre aber nach Lemma 3.2 die Abbildung $i_2(\mathcal{Y}_2)_* = 0$:

$$\begin{array}{ccc}
 (B^1 \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_2(\mathcal{Y}_2)} & (0 - 0_0, 0 - (\mathcal{Y}_2 \cup 0_0)) \\
 \searrow i & & \swarrow \\
 (B^1 \times (B^n - \{0\}), B^1 \times (B^n - \{0\}) - \mathcal{Y}_2) & &
 \end{array}$$

3.4 Proposition: a) $\mathcal{Y}_2$ ist zusammenhängend.

b) $\mathcal{Y}_1$ oder $\mathcal{Y}_1 \cup \{c\}$ ist zusammenhängend, wobei $c \in 0$ kompaktifiziert.

Beweis: a) Der Beweis wird indirekt geführt.

Annahme: $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \mathcal{T}'$, $\mathcal{T} \neq \emptyset \neq \mathcal{T}'$.

Behauptung: $\mathcal{T} \in \mathcal{M}_2$ oder $\mathcal{T}' \in \mathcal{M}_2$, was der Minimalität von $\mathcal{T}_2$ widerspricht.

Erst einmal sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ abgeschlossen in $\mathcal{T}_2$ und damit in $\mathcal{T}_1$. Für die Triade $(\mathcal{O}-\mathcal{O}_0; A, A')$ mit

$$A := \mathcal{O} - (\mathcal{T} \cup \mathcal{O}_0) \quad \text{und} \quad A' := \mathcal{O} - (\mathcal{T}' \cup \mathcal{O}_0)$$

$$\text{gilt:} \quad A \cup A' = \mathcal{O} - \mathcal{O}_0,$$

$$A \cap A' = \mathcal{O} - (\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0).$$

Außerdem sind $A, A' \subset \mathcal{O} - \mathcal{O}_0$ relativ offen, denn $\mathcal{T}_2$ ist offen in $\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0$; somit ist auch $\mathcal{T}'$ offen in $\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0$ und folglich $\mathcal{T} \cup \mathcal{O}_0 = (\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0) - \mathcal{T}'$ abgeschlossen in $\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0$. Letzteres ist abgeschlossen in $\mathcal{O}$, woraus A offen in $\mathcal{O}$ und somit erst recht in $\mathcal{O} - \mathcal{O}_0$ folgt. Analog für A' .

Die Exaktheit der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz von $(\mathcal{O}-\mathcal{O}_0; A, A')$ liefert den waagrechten Isomorphismus in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 h_{1+n-1}(\mathcal{O}-\mathcal{O}_0, A \cap A') & \xrightarrow{\cong} & h_{1+n-1}(\mathcal{O}-\mathcal{O}_0, A) \oplus h_{1+n-1}(\mathcal{O}-\mathcal{O}_0, A') \\
 \parallel & & \nearrow \\
 h_{1+n-1}(\mathcal{O}-\mathcal{O}_0, \mathcal{O} - (\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0)) & & i_2(\mathcal{T})_* \oplus i_2(\mathcal{T}')_* \\
 \uparrow i_{2(\mathcal{T}_2)} & & \\
 h_{1+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & &
 \end{array}$$

Jetzt erhalten wir den gewünschten Widerspruch:

$$\begin{aligned}
 i_{2(\mathcal{T}_2)}(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) &\neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2(\mathcal{T})_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \quad \text{oder} \\
 &\quad i_2(\mathcal{T}')_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \\
 &\Rightarrow \quad \mathcal{T} \in \mathcal{M}_2 \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}' \in \mathcal{M}_2.
 \end{aligned}$$

- b) Ist $\mathcal{Y}$, in einer kompakten Teilmenge von O enthalten, so zeigen wir in Proposition 3.10, daß $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ gilt, $\mathcal{Y}$, also zusammenhängend ist nach Teil a).

Sei nun $\mathcal{Y}$, nicht in einer kompakten Teilmenge von O enthalten. Wir zeigen indirekt, daß dann $\mathcal{Y}_1 \cup \{c\}$ zusammenhängend ist.

Annahme: $\mathcal{Y}_1 \cup \{c\} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}'$, $\mathcal{Y} \neq \emptyset \neq \mathcal{Y}'$

Man bestätigt leicht, daß die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von O homöomorph ist zu E^+/c^+O ; $c^+O := E^+ - O$. c ist der c^+O entsprechende Punkt. Dann ist $\mathcal{Y}_1 \cup \{c\}$ homöomorph zu dem Unterraum $(\mathcal{Y}_1 \cup c^+O)/c^+O$. Sei $p: \mathcal{Y}_1 \cup c^+O \rightarrow \mathcal{Y}_1 \cup \{c\}$ die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\mathcal{T} := p^{-1}(\mathcal{Y}) \quad \text{und} \quad \mathcal{T}' := p^{-1}(\mathcal{Y}').$$

Es gilt: $\mathcal{Y}_1 \cup c^+O = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}'$, $\mathcal{T} \neq \emptyset \neq \mathcal{T}'$.

Da $\mathcal{Y}$, nicht in einer kompakten Teilmenge von O enthalten ist, folgt sogar: $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1 \neq \emptyset \neq \mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1$. Denn $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1 = \emptyset$ impliziert $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1 = \emptyset$, also $\mathcal{Y} = \{c\}$ und somit $\mathcal{T} = c^+O$, $\mathcal{T}' = \mathcal{Y}_1$; aber $\mathcal{Y}_1$ ist nicht abgeschlossen in $\mathcal{Y}_1 \cup c^+O$; analog für $\mathcal{T}'$.

Behauptung: $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1 \in \mathcal{A}_1$ oder $\mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1 \in \mathcal{A}_1$, was der Minimalität von $\mathcal{Y}$, widerspricht.

Klar ist, daß $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1$ abgeschlossen in $f^{-1}(0) - O_0$ sind, denn sie sind abgeschlossen in $\mathcal{Y}_1$, und $\mathcal{Y}_1$ ist abgeschlossen in $f^{-1}(0) - O_0$.

Wir betrachten die Tripel $(O - O_0; A, A')$ und $(E^+ - E_0; B, B')$ mit $A := O - ((\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1) \cup O_0)$, $A' := O - ((\mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1) \cup O_0)$ und

$$B := E^+ - (\mathcal{T} \cup E_0), \quad B' := E^+ - (\mathcal{T}' \cup E_0).$$

Es gilt: $(A, A') \subset (B, B')$,

$$A \cap A' = O - (\mathcal{Y}_1 \cup O_0) = B \cap B',$$

$$A \cup A' = O - O_0,$$

$$B \cup B' = E^+ - E_0.$$

Ähnlich wie in a) sieht man, daß A und A' offen in AUA' und B , B' offen in BUB' sind.

Die beiden exakten Mayer-Vietoris-Sequenzen liefern die unteren Zeilen des folgenden Diagramms.

$$\begin{array}{ccccc}
 & h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) & & & \\
 & \downarrow i_*(\mathcal{Y}_1)_* & \searrow i_*(\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1)_* \bullet i_*(\mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1)_* & & \\
 & h_{1+n-2}(\sigma - (\mathcal{Y}_1 \cup \sigma_0)) & & & \\
 & \downarrow & & & \\
 h_{1+n-1}(\sigma - \sigma_0) & \longrightarrow & h_{1+n-2}(A \cap A') & \longrightarrow & h_{1+n-2}(A) \bullet h_{1+n-2}(A') \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 h_{1+n-1}(E^+ - E_0) & \xrightarrow{\Delta} & h_{1+n-2}(B \cap B') & &
 \end{array}$$

Wir zeigen nun noch, daß $\Delta=0$ ist. Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
 i_*(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 & \Rightarrow i_*(\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \text{ oder} \\
 & i_*(\mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \\
 & \Rightarrow \mathcal{T} \cap \mathcal{Y}_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ oder } \mathcal{T}' \cap \mathcal{Y}_1 \in \mathcal{A}_1
 \end{aligned}$$

Zu $\Delta=0$:

Da $A \cong E_\infty \subset \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ zusammenhängend ist, sei ohne Einschränkung $E_\infty \subset \mathcal{T}$, woraus $E_\infty \subset B'$ folgt. Dann:

$$\begin{array}{ccc}
 h_{1+n-1}(E^+ - E_0) & \xrightarrow{\Delta} & h_{1+n-2}(B \cap B') \\
 \downarrow & \searrow & \uparrow \partial \\
 & h_{1+n-1}(E^+ - E_0, B') \xleftarrow{\cong} h_{1+n-1}(B, B \cap B') & \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 h_{1+n-1}(E^+ - E_0, E_\infty) & &
 \end{array}$$

$h_{l+n-1}(E^+-E_0, E_\infty) \cong \{0\}$, da E_∞ Deformationsretrakt von E^+-E_0 ist; also $\Delta=0$. ■

3.5 Proposition: $\dim_v \mathcal{F}_i \geq k-l+1$ an jedem Punkt $v \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$.

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt.

Annahme: Es gibt $v \in \mathcal{F}_i$ mit $\dim_v \mathcal{F}_i \leq k-l$.

Sei dann U_i eine ohne Einschränkungen kompakte Umgebung von v in $\mathcal{F}_i$ mit $\dim \text{rd}(U_i) \leq k-l-1$.

Wir setzen $\mathcal{T}_i := \mathcal{F}_i - \bar{U}_i$, wobei $\bar{U}_i$ ebenso wie $\text{rd}(U_i)$ bezüglich $\mathcal{F}_i$ gebildet wird. Offenbar ist $\mathcal{T}_i$ abgeschlossen in $\mathcal{F}_i$ und damit in $f^{-1}(0) - O_0$. Wir wollen $\mathcal{T}_i \in \mathcal{M}_i$ zeigen, was wegen $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{F}_i$ ein Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{F}_i$ ist.

1. Fall: $i=1$

Wir definieren

$$A := O^-(\mathcal{T}_1 \cup O_0) \text{ und } A' := E - U_1.$$

Dann gilt:

$$A \cup A' = E - \text{rd}(U_1)$$

$$A \cap A' = O^-(\mathcal{T}_1 \cup O_0)$$

A und A' sind offen in $A \cup A'$, die Mayer-Vietoris-Sequenz von $(A \cup A'; A, A')$ ist exakt.

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n-1}(E - \text{rd}(U_1)) & \xrightarrow{\Delta} & h_{l+n-2}(O^-(\mathcal{T}_1 \cup O_0)) \rightarrow h_{l+n-2}(A) \oplus h_{l+n-2}(A') \\
 & & \uparrow \quad \nearrow \\
 & & i_1(\mathcal{T}_1)_* \quad i_1(\mathcal{T}_1)_* \circ i_* \\
 & & \uparrow \\
 & & h_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1})
 \end{array}$$

Hier ist $i: S^{l-1} \times S^{n-1} \hookrightarrow A'$ die Einbettung.

Wir werden zeigen: $\Delta=0$ und $i_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) = 0$.

Dann folgt aus $i_1(\mathcal{T}_1)_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$ nämlich

$i_1(\mathcal{T}_1)_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$, das heißt $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{M}_1$.

Zu $\Delta=0$:

$$\begin{array}{ccccc}
 h_{1+n-1}(E-\text{rd}(U_1)) & \xrightarrow{\Delta} & h_{1+n-2}(\sigma-(\mathcal{T}, \cup \sigma_0)) & & \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \partial & & \\
 h_{1+n-1}(E-\text{rd}(U_1), E-U_1) & \xleftarrow{\cong} & h_{1+n-1}(\sigma-(\mathcal{T}, \cup \sigma_0), \sigma-(\mathcal{T}, \cup \sigma_0)) & & \\
 \searrow \beta & & & & \\
 h_{1+n-1}(E, E_0) & \longrightarrow & h_{1+n-1}(E, E-U_1) & &
 \end{array}$$

Die nicht gekennzeichneten Abbildungen sowie α , β sind von Einbettungen induziert. Da $h_{1+n-1}(E, E_0) \cong \{0\}$ ist ($E \cong E_0$), folgt $\beta \circ \alpha = 0$. Somit $\alpha = 0$ und damit $\Delta = 0$, da β injektiv ist:

Letzteres folgt aus der exakten Homologiesequenz des Tripels $(E, E-\text{rd}(U_1), E-U_1)$ mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
 h_{1+n}(E, E-\text{rd}(U_1)) &\cong h^{k-1}(E_{\infty} \cup \text{rd}(U_1), E_{\infty}) \cong \\
 &\cong h^{k-1}(\text{rd}(U_1)) \cong \{0\}
 \end{aligned}$$

Hier ist $E_{\infty} = E^+ - E$. Die erste Isomorphie gilt nach Satz A.1.4 (Poincaré-Lefschetz-Dualität in E^+), die zweite ist klar $[E_{\infty} \cup \text{rd}(U_1) = E_{\infty} \cup \text{rd}(U_1)]$, und die dritte gilt wegen $\dim \text{rd}(U_1) \leq k-1$ und Satz A.1.6.

Zu $i_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) = 0$:

Dies ist eine leichte Folgerung aus Lemma 3.2:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_1 \times \Sigma_{n-1} \hookrightarrow h_{1+n-1}(B^{1 \times S^{n-1}}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{j_*} & h_{1+n-1}(E, E-U_1) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 \Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1} \hookrightarrow h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_{1+n-2}(E-U_1) & &
 \end{array}$$

Nach Lemma 3.2 ist $j_* = 0$, denn nach Konstruktion gilt $\bar{U}_1 \subset \mathcal{T}_1$, also $\bar{U}_1 \cap (S^{1-1} \times B^n \cup B^1 \times \{0\}) = \emptyset$.

2. Fall: $t=2$

Hier betrachten wir die relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Triade $(\sigma-\sigma_0; A, A')$ mit

$$A := \sigma - (\mathcal{T}_2 \cup \sigma_0) \quad \text{und} \quad A' := \sigma - (U_2 \cup \sigma_0).$$

$$\text{Es gilt:} \quad A \cup A' = \sigma - (\text{rd}(U_2) \cup \sigma_0)$$

$$A \cap A' = \sigma - (\mathcal{T}_2 \cup \sigma_0).$$

A und A' sind wieder offen in $A \cup A'$ (einfach).

$$\begin{array}{ccc} & & h_{1+n}(\sigma-\sigma_0, A \cup A') \\ & & \downarrow \Delta \\ h_{1+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{i_2(\mathcal{T}_2)_*} & h_{1+n-1}(\sigma-\sigma_0, \sigma - (\mathcal{T}_2 \cup \sigma_0)) \\ & \searrow i_2(\mathcal{T}_2)_* \circ i_* & \downarrow \\ & & h_{1+n-1}(\sigma-\sigma_0, A) \oplus h_{1+n-1}(\sigma-\sigma_0, A') \end{array}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} h_{1+n}(\sigma-\sigma_0, A \cup A') &= h_{1+n}(\sigma-\sigma_0, \sigma - (\text{rd}(U_2) \cup \sigma_0)) \stackrel{*}{\cong} \\ &\cong h_{1+n}(E^+, E^+ - \text{rd}(U_2)) \cong h^{k-1}(\text{rd}(U_2)) \cong \{0\}. \end{aligned}$$

Die Isomorphie $*$ gilt, da wegen $(E^+ - (\sigma-\sigma_0)) \cap \text{rd}(U_2) = \emptyset$ die abgeschlossene Menge $E^+ - (\sigma-\sigma_0)$ ausgeschnitten werden kann.

Die letzten beiden Isomorphismen erhält man wie im ersten Fall.

$i_* = 0$ ist wieder eine einfache Konsequenz von Lemma 3.2.

$$\text{Also } i_2(\mathcal{T}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow i_2(\mathcal{T}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_2 \in \mathbb{A}_2 \quad \blacksquare$$

Zum Beweis von Satz 2.3d) zeigen wir zuerst die folgende, etwas stärkere Aussage. Dazu sei $\bar{\mathcal{T}}_i^+$ der Abschluß von $\mathcal{T}_i$ in E^+ ; es ist $\bar{\mathcal{T}}_i^+ \cap E = \bar{\mathcal{T}}_i$, $i=1,2$.

3.6 Proposition: Für $i=1,2$ induzieren die Einbettungen

$$e_i: S^{1+n-1} \cong S = \text{rd}(B^1 \times B^n) \hookrightarrow (E-(\bar{\gamma}_i - \gamma_i), E - \bar{\gamma}_i) \quad \text{und}$$

$$e'_i: (E-(\bar{\gamma}_i - \gamma_i), E - \bar{\gamma}_i) \hookrightarrow (E^+ - (\bar{\gamma}_i^+ - \gamma_i), E^+ - \bar{\gamma}_i^+)$$

einen Homomorphismus

$$(e'_i \circ e_i)_*: h_{1+n-1}(S^{1+n-1}) \longrightarrow h_{1+n-1}(E^+ - (\bar{\gamma}_i^+ - \gamma_i), E^+ - \bar{\gamma}_i^+)$$

mit $(e'_i \circ e_i)_*(\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$.

Dann gilt natürlich erst recht $e_{i*}(\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$.

Beweis: Aus $\gamma_2 \subset \gamma_1$, abgeschlossen folgt leicht, daß $\bar{\gamma}_2^+ \subset \bar{\gamma}_1^+$ und $\bar{\gamma}_2^+ - \gamma_2 \subset \bar{\gamma}_1^+ - \gamma_1$. Folglich genügt es, $(e'_2 \circ e_2)_*(\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$ zu zeigen, da das $(e'_1 \circ e_1)_*(\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$ impliziert.

Wir betrachten das kommutative Diagramm (wobei wir den Isomorphismus $h_{1+n-1}(S^{1+n-1}) \cong h_{1+n-1}(S)$ unterdrücken)

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 \times \Sigma_{n-1} \in h_{1+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \longrightarrow & h_{1+n-1}(O - O_0, O - (\gamma_2 \cup O_0)) \\ \downarrow & & \downarrow i_{2*}(\gamma_2)_* & & \downarrow i_* \\ \sigma \in h_{1+n-1}(S, S^{1-1} \times B^n) & \longrightarrow & h_{1+n-1}(E^+ - (\bar{\gamma}_2^+ - \gamma_2), E^+ - \bar{\gamma}_2^+) \\ & \nearrow j_* & \nearrow (e'_2 \circ e_2)_* \\ \Sigma_{1+n-1} \in h_{1+n-1}(S) \end{array}$$

Wir werden unten sehen, daß i_* Ausschneidungsisomorphismus ist. Nach Proposition A.1.2i) gilt

$$j_*(r \cdot \Sigma_{1+n-1}) = r \cdot j_*(\Sigma_{1+n-1}) = \sigma, \quad r \in h_0(P).$$

[Es sei daran erinnert, daß alle $h_*(X, A)$ Moduln über dem Ring $h_*(P)$ sind und alle induzierten Morphismen Modulhomomorphismen.]

Das alles ergibt:

$$\begin{aligned} r \cdot (e'_2 \circ e_2)_* (\Sigma_{1+n-1}) &= (e'_2 \circ e_2)_* (r \cdot \Sigma_{1+n-1}) = \\ &= i_* \circ i_2(\mathcal{Y}_2)_* (\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0, \end{aligned}$$

also $(e'_2 \circ e_2)_* (\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$.

Bleibt zu zeigen, daß i_* Isomorphismus ist.

i schneidet $B := (E^+ - O) \cup O_0 - (\bar{\mathcal{Y}}_2^+ - \mathcal{Y}_2) \subset E^+ - \bar{\mathcal{Y}}_2^+ =: A$ aus.

B ist abgeschlossen in $X = E^+ - (\bar{\mathcal{Y}}_2^+ - \mathcal{Y}_2)$, da $(E^+ - O) \cup O_0$ abgeschlossen in E^+ ist. A ist offen in X , also $\bar{B} \subset \bar{A}$.

$X - B = O - O_0$, $A - B = O - (\mathcal{Y}_2 \cup O_0)$ überprüft man leicht. ■

Zum Beweis des folgenden Korollars (und damit von Satz 2.3d))

benötigen wir nur $e_{i*}(\Sigma_{1+n-1}) \neq 0$.

3.7 Korollar: Es gilt wenigstens eine der beiden folgenden Aussagen ($i=1,2$).

- i) $\mathcal{Y}_i$ ist in keiner kompakten Teilmenge von O enthalten.
- ii) Die Einbettung

$$d_i: S^{1-1} \hookrightarrow \Lambda - \mathcal{Y}_i, \quad \mathcal{Y}_i := \bar{\mathcal{Y}}_i \cap O_0,$$

induziert einen Homomorphismus

$$d_{i*}: h_{1-1}(S^{1-1}) \longrightarrow h_{1-1}(\Lambda - \mathcal{Y}_i)$$

mit $d_{i*}(\Sigma_{1-1}) \neq 0$. Insbesondere ist $\mathcal{Y}_i \cap (\Lambda - B^1) \neq \emptyset$.

Beweis: Wenn i) nicht stimmt, so folgt $\bar{\mathcal{Y}}_i - \mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i \subset O_0$, und $\bar{\mathcal{Y}}_i$ und $\mathcal{Y}_i$ sind kompakt. Da i fest ist, schreiben wir $\mathcal{Y}$, $\bar{\mathcal{Y}}$, d , e für $\mathcal{Y}_i$, $\bar{\mathcal{Y}}_i$, d_i , e_i . (In Proposition 3.10 wird gezeigt, daß aus $\bar{\mathcal{Y}}_i$ kompakt sowieso $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_2$ folgt.) Wir betrachten das kommutative Diagramm ($S = \text{rd}(B^1 \times B^n)$)

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n-1}(S) & \xrightarrow{e_*} & h_{l+n-1}(E-\mathfrak{T}, E-\bar{\mathfrak{T}}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \tilde{h}^{k-1+1}(E^+, E^+-S) & \longrightarrow & \tilde{h}^{k-1+1}(\bar{\mathfrak{T}} \cup E_\infty, \mathfrak{T} \cup E_\infty) \\
 \downarrow & \searrow \beta & \downarrow \cong \\
 \tilde{h}^{k-1+1}(\Lambda, \Lambda-S^{l-1}) & \longrightarrow & \tilde{h}^{k-1+1}(\bar{\mathfrak{T}}, \mathfrak{T}) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \cong \\
 \tilde{h}^{k-1+1}(\Lambda, \Lambda-S^{l-1}) & \longrightarrow & \tilde{h}^{k-1+1}(E, \mathfrak{T}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 h_{l-1}(S^{l-1}) & \xrightarrow{d_*} & h_{l-1}(\Lambda-\mathfrak{T})
 \end{array}$$

α (curved arrow from $h_{l+n-1}(S)$ to $h_{l-1}(S^{l-1})$)

Die beiden oberen senkrechten Isomorphismen sind Dualitätsisomorphismen in E^+ . Hier ist zu beachten, daß S zwar nicht offen in E^+ ist, aber starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung $\tilde{S}$; und $E^+-\tilde{S}$ ist starker Deformationsretrakt von E^+-S . Die beiden unteren senkrechten Isomorphismen sind Dualitätsisomorphismen in Λ , und für S^{l-1} gilt Entsprechendes wie für S . Alle anderen Homomorphismen sind von Einbettungen induziert. β ist Isomorphismus, da E_∞ ausgeschnitten wird, und γ , da $\Lambda \hat{=} E_0$ starker Deformationsretrakt von E ist. Nach Proposition 3.6 gilt $e_*(\Sigma_{l+n-1}) \neq 0$. Es folgt offenbar $d_*\alpha(\Sigma_{l+n-1}) \neq 0$. Nun bleibt nur noch zu zeigen, daß $\alpha(\Sigma_{l+n-1})$ in $\tilde{h}_{l-1}(S^{l-1}) = \text{Bild} [\partial: h_1(B^1, S^{l-1}) \longrightarrow h_{l-1}(S^{l-1})]$ liegt.

Denn dann folgt $d_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0$, da $\tilde{h}_{l-1}(S^{l-1})$ als $h_0(P)$ -Modul von Σ_{l-1} erzeugt wird, und da d_* $h_0(P)$ -Modul-Homomorphismus ist. $\alpha(\Sigma_{l+n-1}) \in \tilde{h}_{l-1}(S^{l-1})$ folgt nun aus der Kommutativität des folgenden Diagramms ($B := B^1 \times B^n$) und $\Sigma_{l+n-1} = \partial \Delta_{l+n}$.

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n}(B, S) & \xrightarrow{\partial} & h_{l+n-1}(S) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \tilde{h}^{k-1}(E^+ - S, E^+ - B) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{h}^{k-1+1}(E^+, E^+ - S) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{h}^{k-1}(\Lambda - S^{l-1}, \Lambda - B^1) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{h}^{k-1+1}(\Lambda, \Lambda - S^{l-1}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 h_1(B^1, S^{l-1}) & \xrightarrow{\partial} & h_{l-1}(S^{l-1})
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \alpha \end{array}$$

Zeigen wir noch, wie $\mathcal{F} \cap (\Lambda - B^1) \neq \emptyset$ aus $d_*(\Sigma_{l-1}) \neq \emptyset$ folgt. Wäre nämlich $\mathcal{F} \cap (\Lambda - B^1) = \emptyset$, so wäre $\mathcal{F} = \{\lambda_0\}$. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_1 \in h_1(B^1, S^{l-1}) & \xrightarrow{\partial} & h_{l-1}(S^{l-1}) & \cong & \Sigma_{l-1} \\
 \cong \downarrow d'_* & & \downarrow d_* & & \\
 h_1(\Lambda) & \xrightarrow{i_*} & h_1(\Lambda, \Lambda - \{\lambda_0\}) & \xrightarrow{\partial} & h_{l-1}(\Lambda - \{\lambda_0\})
 \end{array}$$

ist $\partial \Delta_1 = \Sigma_{l-1}$ und $h_1(\Lambda, \Lambda - \{\lambda_0\}) \cong \{0\}$, letzteres falls $l < k$. Ist $l = k$, so besagt die Orientierbarkeit von Λ gerade, daß eine Fundamentalklasse Σ_Λ in $h_k(\Lambda)$ existiert mit $i_*(\Sigma_\Lambda) = d'_*(\Delta_1)$; siehe Switzer [46], Proposition 14.18. Dann impliziert die Exaktheit der unteren Sequenz aber

$$d_*(\Sigma_{l-1}) = \partial d'_*(\Delta_1) = \partial i_*(\Sigma_{l-1}) = 0,$$

im Widerspruch zu $d_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0$. ■

3.8 Proposition: Für $i=1,2$ gibt es abgeschlossene Teilmengen $\mathcal{F}'_i$ von $\mathcal{F}_i = \bar{\mathcal{F}}_i \cap \mathcal{O}_0$ mit

$$\dim_{\lambda} \mathcal{F}'_i \geq k-1 \text{ an jedem Punkt } \lambda \in \mathcal{F}'_i,$$

so daß gilt:

Die Einbettungen

$$c_1: S^{l-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_1 \text{ und}$$

$$c_2: (B^1, S^{l-1}) \hookrightarrow (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_2)$$

induzieren Homomorphismen

$$c_{1*}: h_{l-1}(S^{l-1}) \longrightarrow h_{l-1}(\mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_1)$$

$$c_{2*}: h_1(B^1, S^{l-1}) \longrightarrow h_1(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_2)$$

mit $c_{1*}(\Sigma_{l-1}) \neq 0$ und $c_{2*}(\Delta_1) \neq 0$.

Beweis: a) $i=1$

1. Schritt: Für $c_1(\mathcal{F}_1): S^{l-1} \hookrightarrow \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_1$ gilt

$$c_1(\mathcal{F}_1)_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0.$$

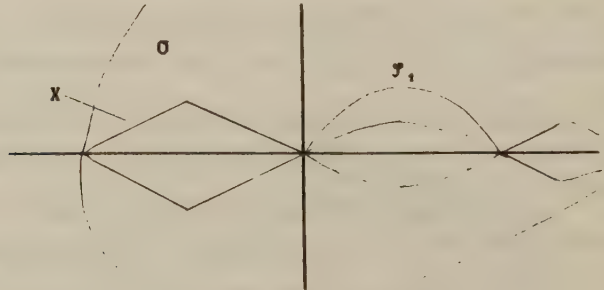
2. Schritt: Existenz von $\mathcal{F}'_1$

Zu 1: Wir definieren

$$\varphi: \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \varphi(\lambda) := \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(\{\lambda\}, \bar{\mathcal{F}}_1, \text{Urd}(\mathcal{O})), \text{ und}$$

$$X := \{v \in \mathcal{O} \subset E: p(v) \in \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_1, \|v\| = \varphi(p(v))\}.$$

Man beachte: $\varphi(\lambda) < \infty$, da $\bar{\mathcal{F}}_1 \neq \emptyset$; $\varphi(\lambda) > 0$, da $\lambda \notin \bar{\mathcal{F}}_1, \text{Urd}(\mathcal{O})$.



Hier haben wir das Tangentialbündel TE von E mit einer Riemannschen Metrik versehen. Diese induziert zum einen eine Riemannsche Metrik auf E (denn E ist ja Teil-

bündel von $TE|A$), so daß also jede Faser $p^{-1}(\lambda)$ ein Skalarprodukt (und damit eine Norm 1.1) besitzt. Für λ in $\mathbb{R}^k \cong M \subset A$ hatten wir $p^{-1}(\lambda)$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert (mit Hilfe unserer Karte $\kappa: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(M)$ aus § 1). Die auf $\mathbb{R}^n$ betrachtete Norm, die ja in die Definition von B^n und S^{n-1} einging, komme von diesem Skalarprodukt. Insbesondere gilt für $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$: $\|\kappa(\lambda, x)\| = \|x\|$. Und zum andern induziert die Riemannsche Metrik auf TE eine Metrik dist auf E , den Riemannschen Abstand (siehe Dieudonné [14], 20.16). Dann ist $(X, p|X, O_0 - \mathcal{F}_1)$ ein zu $(SE|O_0 - \mathcal{F}_1, p|O_0 - \mathcal{F}_1)$ bündelisomorphes S^{n-1} -Bündel über $O_0 - \mathcal{F}_1$, wobei $SE = \{v \in E: \|v\|=1\}$ das zu E gehörige Sphärenbündel ist. Sei

$$\varphi: SE|O_0 - \mathcal{F}_1 \longrightarrow X, v \mapsto \varphi(p(v)) \cdot v,$$

dieser Bündelisomorphismus. Wir haben das kommutative Diagramm $[BE = \{v \in E: \|v\| \leq 1\}]$ ist das zu E gehörige Scheibenbündel]:

$$\begin{array}{ccc}
 h_{1-1}(S^{1-1}) & \xrightarrow{c_1(\mathcal{F}_1)_*} & h_{1-1}(O_0 - \mathcal{F}_1) \\
 \cong \downarrow \Phi_1^{-1} & & \cong \downarrow \Phi_2^{-1} \\
 h_{1+n-1}(S^{1-1} \times B^n, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \longrightarrow & h_{1+n-1}(BE|O_0 - \mathcal{F}_1, SE|O_0 - \mathcal{F}_1) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) & \longrightarrow & h_{1+n-2}(SE|O_0 - \mathcal{F}_1) \\
 \downarrow i_1(\mathcal{F}_1)_* & & \cong \downarrow \varphi_* \\
 h_{1+n-2}(O - (\mathcal{F}_1 \cup O_0)) & \longleftarrow & h_{1+n-2}(X)
 \end{array}$$

Dabei sind alle nicht gekennzeichneten Abbildungen von Einbettungen induziert; Φ_1 und Φ_2 sind die Thom-Isomorphismen der entsprechenden Bündel (siehe im Anhang A.3.3, A.3.4). Das erste Quadrat kommutiert nach Satz A.3.3 und das letzte, da

$$\begin{array}{ccc} S^{l-1} \times S^{n-1} & \hookrightarrow & SE|_{O_0 - \mathcal{F}_1} \\ i_1(\mathcal{F}_1) \downarrow & & \downarrow \Psi \\ O - (\mathcal{F} \cup O_0) & \longleftrightarrow & X \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutiert.

Nach Proposition A.3.5 gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{-1}(\Sigma_{l-1}) &= \Sigma_{l-1} \times \Delta_n, \text{ also} \\ \partial \Phi_1^{-1}(\Sigma_{l-1}) &= (-1)^{l-1} \Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}. \end{aligned}$$

Nun folgt $c_1(\mathcal{F})_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0$ aus $i_1(\mathcal{F})_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$.

Zu 2: Zur Konstruktion von $\mathcal{F}'_1$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &:= \{\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1: \mathcal{F} \text{ abgeschlossen in } \mathcal{F}_1, c_1(\mathcal{F})_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0\}, \\ \text{wobei } c_1(\mathcal{F}): S^{l-1} &\hookrightarrow O_0 - \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Lemma 3.1 zeigt man nun, daß $\mathcal{N}_1$ nach unten induktiv geordnet ist, wobei alle beteiligten Mengen $O_0 - \mathcal{F}$ als offene Teilmengen von Λ aufgefaßt werden, weshalb Satz A.1.5 angewandt werden kann. Wegen $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{N}_1$ ist $\mathcal{N}_1$ nicht leer, also existiert nach Zorns Lemma ein bezüglich " $\subset$ " minimales Element $\mathcal{F}'_1$ von $\mathcal{N}_1$. Bleibt somit zu zeigen:

$$\dim_{\lambda} \mathcal{F}'_1 \geq k-1 \text{ an jedem Punkt } \lambda \in \mathcal{F}'_1.$$

Für $l=k$ gilt das per definitionem.

Sei nun $l < k$.

Annahme: Es gibt $\lambda \in \mathcal{V}'_1$ und beliebig kleine (o. E. kompakte) Umgebungen U von λ in $\mathcal{V}'_1$ mit $\dim \text{rd}(U) \leq k-l-2$.

Wir führen dies zum Widerspruch und müssen dazu zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $\{\lambda\} \subset \mathcal{V}'_1$ offen, also $\mathcal{V}'_1 - \{\lambda\} \subset \mathcal{V}'_1$ abgeschlossen

Dann setzen wir $\mathcal{V} := \mathcal{V}'_1 - \{\lambda\}$ und zeigen $\mathcal{V} \in \mathcal{N}_1$ - ein Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{V}'_1$.

$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'_1 \subset \mathcal{V}_1$ abgeschlossen ist vorausgesetzt.

Betrachte die Triade $(\Lambda; \mathcal{O}_0 - \mathcal{V}, \Lambda - \{\lambda\})$. Die beiden Mengen sind offen in $\Lambda = (\mathcal{O}_0 - \mathcal{V}) \cup (\Lambda - \{\lambda\})$, und wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 h_1(\Lambda) & \xrightarrow{\Delta} & h_{l-1}(\mathcal{O}_0 - \mathcal{V}'_1) & \longrightarrow & h_{l-1}(\mathcal{O}_0 - \mathcal{V}) \oplus h_{l-1}(\Lambda - \{\lambda\}) \\
 & & \uparrow c_{1,*} & \nearrow c_1(\mathcal{V})_* \oplus i_* & \\
 & & h_{l-1}(S^{l-1}) & &
 \end{array}$$

Nun zeigen wir noch $\Delta = 0$ und $i_*(\Sigma_{l-1}) = 0$, woraus $c_1(\mathcal{V})_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0$ folgt, das heißt $\mathcal{V} \in \mathcal{N}_1$.

Zu $\Delta = 0$:

$$\begin{array}{ccc}
 h_1(\Lambda) & \xrightarrow{\Delta} & h_{l-1}(\mathcal{O}_0 - \mathcal{V}'_1) \\
 \downarrow & & \uparrow \partial \\
 \{0\} \stackrel{*}{\cong} h_1(\Lambda, \Lambda - \{\lambda\}) & \xleftarrow{\cong} & h_1(\mathcal{O}_0 - \mathcal{V}, \mathcal{O}_0 - \mathcal{V}'_1)
 \end{array}$$

* gilt, da $l < k$, Λ k -dimensionale Mannigfaltigkeit und h_* zusammenhängend ist.

Zu $i_*(\Sigma_{1-1}) \neq 0$:

Falls $\lambda \neq \lambda_0$, so ist $B^1 \subset \Lambda - \{\lambda\}$ - da $\lambda \in \mathcal{T}_1 \subset \bar{\mathcal{T}}_1$, - also

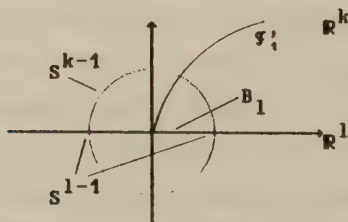
$$\begin{array}{ccccc} h_1(B^1, S^{1-1}) & \xrightarrow{\partial} & h_{1-1}(S^{1-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_{1-1}(\Lambda - \{\lambda\}) \\ \Delta_1 \longmapsto & & \Sigma_{1-1} & \searrow & \nearrow \\ & & & 0 \in h_{1-1}(B^1) & \end{array}$$

Falls $\lambda = \lambda_0 \neq 0$, so ist $S^{k-1} \subset \Lambda - \{\lambda\}$, also $(1 < k)$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{1-1} \in h_{1-1}(S^{1-1}) & \xrightarrow{i_*} & h_{1-1}(\Lambda - \{\lambda\}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 \in h_{1-1}(S^{k-1}) & \end{array}$$

2. Fall: $\{\lambda\} \subset \mathcal{T}'_1$ nicht offen.

Dann wählen wir ein U wie in der Annahme und so klein, daß es in einer Kartenumgebung $V \cong \mathbb{R}^k$ enthalten ist mit: $V \cap B^1 \neq \emptyset \Rightarrow V \subset \Lambda - S^{k-1}$. Dies ist möglich, da $\bar{\mathcal{T}}'_1 \cap (B^1 - \{0\}) = \emptyset$.



Es gilt $\bar{U} - \{\lambda\} \neq \emptyset$. Wir setzen

$$\mathcal{T} := (\mathcal{T}'_1 - \bar{U}) \cup \{\lambda\} \subset \mathcal{T}'_1$$

und zeigen $\mathcal{T} \in \mathcal{M}_1$, was der Minimalität von $\mathcal{T}'_1$ widerspricht.

Klar ist, daß $\mathcal{T}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{T}'_1$ und damit von $\mathcal{T}_1$ ist.

Die Triade $(\Lambda - (\{\lambda\} \text{Urd}(U)); \sigma_0 - \mathcal{T}, \Lambda - U)$ liefert wieder eine exakte Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\begin{array}{ccccc}
 h_1(\Lambda - (\{\lambda\} \text{Urd}(U))) & \xrightarrow{\Delta} & h_{1-1}(\sigma_0 - \mathcal{T}'_1) & \rightarrow & h_{1-1}(\sigma_0 - \mathcal{T}) \oplus h_{1-1}(\Lambda - U) \\
 & & \uparrow c_{1,*} & \nearrow c_{1,*} \oplus i_* & \\
 & & h_{1-1}(S^{1-1}) & &
 \end{array}$$

Wie oben ist $\Delta = 0$ und $i_*(\tau_{1-1}) = 0$ zu zeigen.

Zu $\Delta = 0$:

Wir wählen ein $r > 0$ mit $U \subset K_r(\lambda)$, wobei $K_r(\lambda)$ die offene Kugel vom Radius r um λ in $V \cong \mathbb{R}^k$ ist (U ist kompakt). Dann ist $\Lambda - K_r(\lambda)$ starker Deformationsretrakt von $\Lambda - \{\lambda\}$.

$$\begin{array}{ccc}
 h_1(\Lambda - (\{\lambda\} \text{Urd}(U))) & \xrightarrow{\Delta} & h_{1-1}(\sigma_0 - \mathcal{T}'_1) \\
 \downarrow \alpha & & \uparrow \partial \\
 h_1(\Lambda - (\{\lambda\} \text{Urd}(U)), \Lambda - U) & \xleftarrow{\cong} & h_1(\sigma_0 - \mathcal{T}, \sigma_0 - \mathcal{T}'_1) \\
 \searrow \beta & & \\
 \{0\} \cong h_1(\Lambda - \{\lambda\}, \Lambda - K_r(\lambda)) & \longrightarrow & h_1(\Lambda - \{\lambda\}, \Lambda - U)
 \end{array}$$

β ist injektiv, denn man betrachte die lange exakte Sequenz des Tripels $(\Lambda - \{\lambda\}, \Lambda - (\{\lambda\} \text{Urd}(U)), \Lambda - U)$ und verwende, daß nach den Sätzen A.1.4 und A.1.6 wegen $\dim \text{rd}(U) \leq k-1-2$ gilt;

$$\begin{aligned} h_{1+1}(\wedge-\{\lambda\}, \wedge-(\{\lambda\}\text{Urd}(U))) &\cong h^{k-1-1}(\{\lambda\}\text{Urd}(U), \{\lambda\}) \\ &\cong h^{k-1-1}(\text{rd}(U)) \cong \{0\}. \end{aligned}$$

Somit $\beta \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \Delta = 0$.

Zu $i_*(\Sigma_{1-1}) = 0$:

Dies zeigt man wie im ersten Fall, da

$i: S^{1-1} \hookrightarrow \wedge\text{-}U$ nach Wahl von U über B^1 oder über S^{k-1} faktorisiert.

b) $i=2$

1. Schritt: Für $c_2(\mathcal{F}_2): (B^1, S^{1-1}) \hookrightarrow (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_2)$ gilt
 $c_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1) \neq 0$.

2. Schritt: Existenz von $\mathcal{F}_2$

Zu 1: Wir zeigen: Für alle abgeschlossenen Umgebungen U von $\mathcal{F}_2$ in $\mathcal{O}_0$ mit $U \subset \mathcal{O}_0 - S^{1-1}$ gilt: $c_2(U)_*(\Delta_1) \neq 0$, wobei $c_2(U): (B^1, S^{1-1}) \hookrightarrow (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - U)$.

Nach Satz A.1.5 gilt nämlich

$$h_1(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_2) \cong \text{colim}_U h_1(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - U),$$

und man erhält $c_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1) \neq 0$ wie im Beweis von Lemma 3.1.

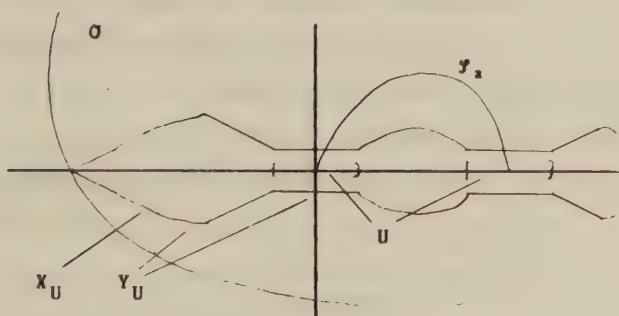
Sei also U eine solche Umgebung. Wir setzen:

$$\varphi_U^+: \mathcal{O}_0 - \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad \varphi_U^+(\lambda) := \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(\{\lambda\}, \bar{\mathcal{F}}_2 \text{Urd}(\mathcal{O})).$$

$\varphi_U: \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sei irgendeine stetige Erweiterung von φ_U^+ mit der Eigenschaft $\varphi_U(\lambda) < \text{dist}(\{\lambda\}, \text{rd}(\mathcal{O}))$. Hier wenden wir natürlich den Satz von Tietze-Urysohn (siehe Schubert [44], S. 83) an: $\mathcal{O}_0$ ist normal als Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_0 - \bar{U} \subset \mathcal{O}_0$ ist abgeschlossen. Dies ist der Grund für die Einführung der Umgebungen U . Die Abbildung $\mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\lambda \mapsto \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(\{\lambda\}, \bar{\mathcal{F}}_2 \text{Urd}(\mathcal{O}))$, kann nicht auf $\mathcal{O}_0$ fortgesetzt werden.

$$X_U := \{v \in O: p(v) \in O_0 - U, |v| = \varphi_U(p(v))\}$$

$$Y_U := \{v \in O: p(v) \in O_0, |v| = \varphi_U(p(v))\}$$



Wie in a) gibt es einen Bündelisomorphismus

$$\psi: (SE|O_0, SE|O_0 - U) \longrightarrow (Y_U, X_U), \quad \psi(v) := \varphi_U(p(v)) \cdot v$$

und ein kommutatives Diagramm ($S := \text{rd}(B^1 \times B^n)$)

$$\begin{array}{ccc}
 h_1(B^1, S^{1-1}) & \xrightarrow{c_*(U)_*} & h_1(O_0, O_0 - U) \\
 \downarrow \phi_1^{-1} & & \downarrow \phi_2^{-1} \\
 h_{1+n}(B^1 \times B^n, S) & \longrightarrow & h_{1+n}(BE|O_0, SE|O_0 \cup BE|O_0 - U) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 h_{1+n-1}(S, S^{1-1} \times B^n) & \longrightarrow & h_{1+n-1}(SE|O_0 \cup BE|O_0 - U, BE|O_0 - U) \\
 \cong \downarrow i_* & & \cong \downarrow j_* \\
 h_{1+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \longrightarrow & h_{1+n-1}(SE|O_0, SE|O_0 - U) \\
 \downarrow i_2(f_2)_* & & \downarrow \psi_* \\
 h_{1+n-1}(O - O_0, O - (f_2 \cup O_0)) & \longleftarrow & h_{1+n-1}(Y_U, X_U)
 \end{array}$$

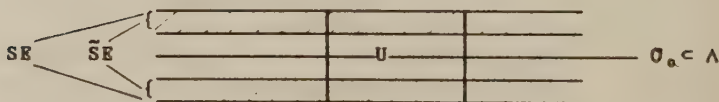
Wieder sind alle nicht gekennzeichneten Abbildungen sowie i_* und j_* von Einbettungen induziert. ϕ_1 und ϕ_2 sind die relativen Thom-Isomorphismen der entsprechenden Bündel. Das oberste Quadrat kommutiert nach Satz A.3.3 und das unterste, da

$$\begin{array}{ccc}
 (B^1 \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \hookrightarrow & (SE|O_0, SE|O_0 - U) \\
 \downarrow & & \downarrow \psi \\
 (O - O_0, O - (\mathcal{T}_2 \cup O_0)) & \longleftarrow & (Y_U, X_U)
 \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutiert. i_* und j_* sind Ausschneidungsisomorphismen. Dies ist klar für i_* , und für j_* sieht man das so:

Wir setzen

$$\tilde{SE} := \{v \in E : \frac{1}{2} < \|v\| \leq 1\}$$



Dann sind im folgenden kommutativen Diagramm die beiden senkrechten Homomorphismen von Homotopieäquivalenzen induziert, also bijektiv.

$$\begin{array}{ccc}
 h_{1+n-1}(SE|O_0, SE|O_0 - U) & \xrightarrow{j_*} & h_{1+n-1}(SE|O_0 \cup BE|O_0 - U, BE|O_0 - U) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 h_{1+n-1}(\tilde{SE}|O_0, \tilde{SE}|O_0 - U) & \xrightarrow{j'_*} & h_{1+n-1}(\tilde{SE}|O_0 \cup BE|O_0 - U, BE|O_0 - U)
 \end{array}$$

j'_* ist nun ein normaler Ausschneidungsisomorphismus, denn $B := (BE - \tilde{SE})|_{O_0 - U}$ ist abgeschlossen in $X := \tilde{SE}|_{O_0} \cup BE|_{O_0 - U}$:

$$B \ni x_n \rightarrow x \in X \Rightarrow \|x\| \leq \frac{1}{2} \text{ und } x \in X \Rightarrow x \in B.$$

Und $A := BE|_{O_0 - U}$ ist offen in X - weil $O_0 - U$ offen in O_0 ist -, also $\bar{B} \subset \bar{A}$, und j'_* schneidet gerade B aus.

Nach Satz A.3.5 und Proposition A.4.2iii) gilt nun:

$$i_*^{-1} \partial_{+1}^{-1} (\Delta_1) = i_*^{-1} \partial (\Delta_1 \times \Delta_n) = (-1)^1 \Delta_1 \times \Sigma_{n-1}.$$

Jetzt folgt $c_2(U)_*(\Delta_1) \neq 0$ natürlich aus

$$i_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0.$$

Damit ist der erste Schritt gezeigt.

Zu 2: Analog zu Teil a) 2. Schritt betrachten wir

$$M_2 := \{\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2: \mathcal{F} \text{ abgeschlossen in } \mathcal{F}_2, c_2(\mathcal{F})_*(\Delta_1) \neq 0\},$$

$$\text{wobei } c_2(\mathcal{F}): (B^1, S^{1-1}) \hookrightarrow (O_0, O_0 - \mathcal{F}).$$

Wie in a) erhält man ein minimales Element $\mathcal{F}'_2$ von M_2 , von dem zu zeigen bleibt:

$$\dim_\lambda \mathcal{F}'_2 \geq k-1 \text{ an jedem Punkt } \lambda \in \mathcal{F}'_2.$$

Für $l=k$ gilt dies wieder per definitionem. Sei $l < k$.

Annahme: Es gibt $\lambda \in \mathcal{F}'_2$ und beliebig kleine (o. E. kompakte) Umgebungen U von λ in $\mathcal{F}'_2$ mit

$$\dim \text{rd}(U) \leq k-l-2.$$

Seien λ, U wie in der Annahme und U so klein, daß gilt

$$U \cap B^1 \neq \emptyset \Rightarrow U \subset \Lambda - S^{k-1}.$$

Wir setzen $\mathcal{F} := \mathcal{F}'_2 - \bar{U} \subset \mathcal{F}'_2$. $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{F}'_2$.

Dann liefert die Triade $(O_0; O_0 - \mathcal{F}, O_0 - U)$ eine exakte relative Mayer-Vietoris-Sequenz.

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+1}(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \text{rd}(U)) & & \\
 \downarrow \Delta & & \\
 h_l(B^1, S^{l-1}) \xrightarrow{c_2(\mathcal{F}'_2)_*} h_l(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_2) & & \\
 \swarrow c_2(\mathcal{F})_* \circ i_* \quad \downarrow & & \\
 & h_l(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}) \oplus h_l(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - U) &
 \end{array}$$

Nun ist

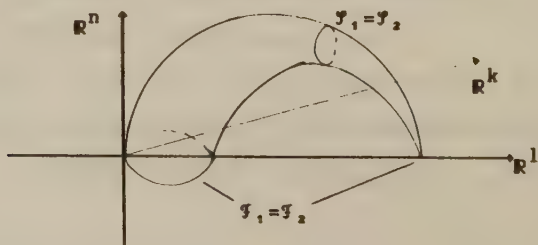
$$\begin{aligned}
 h_{l+1}(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \text{rd}(U)) &\cong \tilde{h}^{k-l-1}((\text{rd}(U) \cup (\Lambda - \mathcal{O}_0), \Lambda - \mathcal{O}_0) \cong \\
 &\cong \tilde{h}^{k-l-1}(\text{rd}(U)) \cong \{0\},
 \end{aligned}$$

da $\text{rd}(U) \cup (\Lambda - \mathcal{O}_0) \cong \text{rd}(U) \# (\Lambda - \mathcal{O}_0)$ und $\dim \text{rd}(U) \leq k-l-2$ (dann Satz A.1.6 anwenden). Also folgt

$$(c_2(\mathcal{F})_* \circ i_*)(\Delta_1) \neq 0 \quad \text{aus} \quad c_2(\mathcal{F}'_2)_*(\Delta_1) \neq 0.$$

Da aber $i_*(\Delta_1) = 0$ ist nach Wahl von U (wie man leicht sieht), erhalten wir $c_2(\mathcal{F})_*(\Delta_1) \neq 0$, das heißt $\mathcal{F} \in \mathcal{N}_2$ - im Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{F}'_2$. ■

3.9 Bemerkung: Die Dimensionsaussage von Proposition 3.8 gilt im allgemeinen nicht schon für $\mathcal{F}_1$ bzw. $\mathcal{F}_2$ selbst. Das folgende Bild veranschaulicht das.



3.10 Proposition: Es gebe eine reelle Zahl $R > 0$ mit $\|v\| < R$ für alle $v \in \mathcal{F}_2$; die Norm $\|\cdot\|$ komme von einer beliebigen Riemannschen Metrik auf E . Außerdem gelte $\bar{\mathcal{F}}_2 \cap \text{Ord}(0) = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. (Die Voraussetzungen an $\mathcal{F}_2$ sind äquivalent zur Kompaktheit von $\bar{\mathcal{F}}_2 \subset \mathcal{O}$.)

Beweis: Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n-1}(B^{1-1} \times S^{n-1}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_0} & h_{l+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) \\
 \downarrow i_2(\mathcal{F}_2)_* & & \downarrow i_1(\mathcal{F}_2)_* \\
 h_{l+n-1}(0 - 0_0, 0 - (\mathcal{F}_2 \cup 0_0)) & \xrightarrow{\partial_1} & h_{l+n-2}(0 - (\mathcal{F}_2 \cup 0_0)) \\
 \downarrow i_* & & \downarrow \\
 h_{l+n-1}(E^+ - E_0, E^+ - (\mathcal{F}_2 \cup E_0)) & \xrightarrow{\partial_2} & h_{l+n-2}(E^+ - (\mathcal{F}_2 \cup E_0)) \\
 \uparrow & \swarrow & \\
 h_{l+n-1}(E^+ - E_0) & \longrightarrow & h_{l+n-1}(E^+ - E_0, E_\infty) \cong \{0\}
 \end{array}$$

Hier sind alle nicht gekennzeichneten Abbildungen sowie i_* von Einbettungen induziert. i_* ist Ausschneidungsisomorphismus, da nach Voraussetzung $E^+ - (\mathcal{F}_2 \cup E_0)$ offen ist in E^+ und somit erst recht in $E^+ - E_0$. i_* schneidet $E^+ - (E_0 \cup 0)$ aus, eine abgeschlossene Teilmenge von $E^+ - E_0$. Außerdem ist E_∞ starker Deformationsretrakt von $E^+ - E_0$, und das impliziert $h_{l+n-1}(E^+ - E_0, E_\infty) \cong \{0\}$. Folglich ist ∂_2 injektiv, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 i_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 &\Rightarrow \partial_2 i_* i_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \\
 &\Rightarrow i_1(\mathcal{F}_2)_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) = i_1(\mathcal{F}_2)_* \partial_0(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathcal{F}_2 \in \mathcal{A}_1 = \{\mathcal{F} \subset f^{-1}(0) - \mathcal{O}_0 : \mathcal{F} \text{ abgeschlossen in } f^{-1}(0) - \mathcal{O}_0, \\ i_1(\mathcal{F})_* (\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0\}$$

Wegen $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_1$ minimal in $\mathcal{A}_1$ folgt $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$. ■

3.11 Proposition: $\mathcal{O} \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{O}_0 \cong \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Beweis: Wie im Beweis von Proposition 3.10 werden wir zeigen:

$\mathcal{F}_2 \in \mathcal{A}_1$, das heißt $i_1(\mathcal{F}_2)_* (\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$, woraus wie oben $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ folgt.

$$\begin{array}{ccc} h_{1+n-1}(B^{1 \times S^{n-1}}, S^{1-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & h_{1+n-2}(S^{1-1} \times S^{n-1}) \\ \downarrow i_2(\mathcal{F}_2)_* & & \downarrow i_1(\mathcal{F}_2)_* \\ h_{1+n}(\mathcal{O}, \mathcal{O} - \mathcal{O}_0) & \xrightarrow{j_*} h_{1+n-1}(\mathcal{O} - \mathcal{O}_0, \mathcal{O} - (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{O}_0)) & \xrightarrow{\partial} h_{1+n-2}(\mathcal{O} - (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{O}_0)) \\ \downarrow i_* & \nearrow \partial_1 & \\ h_{1+n-1}(\mathcal{O}) & \xrightarrow{j_*} & h_{1+n-1}(\mathcal{O}, \mathcal{O} - (\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{O}_0)) \end{array}$$

Behauptung: i) $\partial_0 = 0$, also i_* injektiv (Bild $\partial_0 = \text{Kern } i_*$)

ii) $j_* = 0$, also ∂_1 injektiv (Bild $j_* = \text{Kern } \partial_1$)

Dann erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} i_1(\mathcal{F}_2)_* (\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) &= i_1(\mathcal{F}_2)_* \partial(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) = \\ &= \partial_* i_* i_2(\mathcal{F}_2)_* (\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Zu i) Sei $\varphi: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi(\lambda) := \min \{1, \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(\{\lambda\}, \text{rd}(\mathcal{O}))\}$,

$$X := \{v \in \mathcal{O} \subset E : p(v) \in \mathcal{O}_0, |v| \leq \varphi(p(v))\}.$$

X ist Totalraum eines B^n -Bündels über $\mathcal{O}_0$. Dieses Bündel ist trivial wegen $\mathcal{O}_0 \cong \mathbb{R}^k$, $(X, X - \mathcal{O}_0) \cong (\mathbb{R}^k \times B^n, \mathbb{R}^k \times (B^n - \{0\}))$.

Dann ist aber die Einbettung

$$\{1\} \times \epsilon \cdot S^{n-1} \hookrightarrow X - \mathcal{O}_0$$

eine Homotopieäquivalenz $[1 \hat{=} (1, 0, \dots, 0) \in S^{1-1}, \epsilon := \varphi(1)]$:

Das folgende Diagramm, in dem wieder alle nicht gekennzeichneten Abbildungen von Einbettungen induziert sind, kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n}(X, X-G_0) & \xrightarrow{\alpha} & h_{l+n}(G, G-G_0) \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
 h_{l+n-1}(X-G_0) & \xrightarrow{\quad} & h_{l+n-1}(G-G_0) \\
 \uparrow \alpha & & \downarrow \\
 h_{l+n-1}(\{1\} \times \epsilon \cdot S^{n-1}) & \xrightarrow{0} & h_{l+n-1}(G-G_0, G-(\mathcal{T}_2 \cup G_0))
 \end{array}
 \quad \delta_0$$

Der obere Isomorphismus ist Ausschneidungsisomorphismus, wie man leicht sieht. Der untere Homomorphismus ist 0, da $\{1\} \times \epsilon \cdot S^{n-1} \subset G-(\mathcal{T}_2 \cup G_0)$. Somit ist $\delta_0 = 0$ wie behauptet. Zu ii) Sei $t \in G-(\mathcal{T}_2 \cup G_0)$ beliebig. Wegen $G \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ist G zusammenziehbar. Wir erhalten $j_* = 0$:

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n-1}(G) & & \\
 \downarrow j_* & \searrow & \\
 & & h_{l+n-1}(G, *) \cong \{0\} \\
 & \nearrow & \\
 h_{l+n-1}(G, G-(\mathcal{T}_2 \cup G_0)) & &
 \end{array}$$

3.12 Bemerkung: Man überzeugt sich leicht, daß die Eigenschaften a), d) und e) von Satz 2.3 für alle $\mathcal{T} \subset f^{-1}(0) - G_0$ gelten mit $i_*(\mathcal{T})_*(\Delta_1 \times \mathbb{Z}_{n-1}) \neq 0$. Im Beweis der anderen Eigenschaften wurde die Minimalität von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ ausgenutzt.

Die Voraussetzung an h_* , zusammenhängend zu sein, war nur für die Dimensionsaussagen in Satz 2.3c) und e) nötig.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 2.6. Hier war zusätzlich vorausgesetzt worden, daß die Abbildung

$$L: S^{1-1} \longrightarrow GL(n), \lambda \mapsto D_x f(\lambda, 0),$$

wohldefiniert und stetig ist. L induziert $\gamma^S \in \pi_{1-1}(GL)$.

Satz 2.6 besagte:

$$J_{\gamma}^S \neq 0 \in \pi_{1-1}^S = \operatorname{colim}_{r \rightarrow \infty} \pi_{r+1-1}(S^r) \\ \Rightarrow f_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \in \omega_{1+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\})$$

Sei $F: S^{1-1} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, $F(\lambda, x) := L(\lambda) \cdot x$.

3.13 Lemma: $F \circ f: S^{1-1} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Beweis: Die gesuchte Homotopie ist gegeben durch

$$H: S^{1-1} \times S^{n-1} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}, \\ H(\lambda, x, t) := \begin{cases} f(\lambda, tx)/t = L(\lambda) \cdot x + [(f(\lambda, tx) - L(\lambda) \cdot tx)]/t & t \neq 0 \\ L(\lambda) \cdot x & t = 0 \end{cases}$$

Die Stetigkeit von H folgt leicht aus der definierenden Gleichung für $L(\lambda) = D_x f(\lambda, 0)$:

$$f(\lambda, x) = L(\lambda) \cdot x + o(\|x\|) \quad \text{für } \|x\| \rightarrow 0,$$

sowie aus der Stetigkeit von L . ■

Wegen Lemma 3.13 genügt es also zu zeigen:

$$F_*(\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \in \omega_{1+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \omega_{1+n-2}(S^{n-1}).$$

Da S^{n-1} starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ist, können wir ohne Einschränkungen voraussetzen, daß Bild $F \subset S^{n-1}$, also von jetzt an $F: S^{1-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$. F induziert vermöge der Hopf-Konstruktion (siehe Definition A.2.1) eine Abbildung

$$\Gamma F: S^{1-1} \times S^{n-1} = B^1 \times S^{n-1} \cup S^{1-1} \times B^n \longrightarrow S^n,$$

von der wir die folgenden Eigenschaften benötigen.

- i) $\Gamma F(B^1 \times S^{n-1}) \subset B_+^n := \{y \in S^n: y_{n+1} \geq 0\}$
 $\Gamma F(S^{1-1} \times B^n) \subset B_-^n := \{y \in S^n: y_{n+1} \leq 0\}$
 $\Gamma F|_{S^{1-1} \times S^{n-1}} = F: S^{1-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} = B_+^n \cap B_-^n \subset S^n$

ii) ΓF induziert $J_?^s$, das heißt $J_?^s = c_n([\Gamma F])$ mit

$$[\Gamma F] \in \pi_{1+n-1}(S^n) \quad \text{und} \quad c_n: \pi_{1+n-1}(S^n) \longrightarrow \pi_{1-1}^s \quad \text{kanonisch.}$$

(Hier unterdrückten wir einen fest zu wählenden Homöomorphismus $S^{1-1} * S^{n-1} \cong S^{1+n-1}$.)

Wegen i) bildet $(\Gamma F)_*$ die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz von $(S^{1-1} * S^{n-1}; B^1 * S^{n-1}, S^{1-1} * B^n)$ ab auf die von $(S^n; B_+^n, B_-^n)$. Wir benötigen nur den folgenden Ausschnitt dieses Leiterdiagramms.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}_{1+n-1}(S^{1+n-1}) \cong \tilde{\omega}_{1+n-1}(S^{1-1} * S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{\omega}_{1+n-2}(S^{1-1} * S^{n-1}) \\ \downarrow (\Gamma F)_* & & \downarrow F_* \\ \tilde{\omega}_{1+n-1}(S^n) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{\omega}_{1+n-2}(S^{n-1}) \end{array}$$

Satz 2.6 ist nun eine Konsequenz der Lemmata 3.14 bis 3.16.

3.14 Lemma: $\partial_*(\Sigma_{1+n-1}) \in \{\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}, -\Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}\}$

Beweis: Nach Proposition A.1.2ii) ist $r \cdot \partial_*(\Sigma_{1+n-1}) = \Sigma_{1-1} \times \Sigma_{n-1}$ mit $\text{rew}_*(P) \in \mathbb{Z}$ Einheit. ■

3.15 Lemma: $(\Gamma F)_*(\Sigma_{1+n-1}) = J_?^s \in \pi_{1-1}^s \cong \tilde{\omega}_{1+n-1}(S^n)$

Beweis: Das ist gerade Aussage ii) über ΓF zusammen mit der Definition von J (Definition A.2.1). ■

3.16 Lemma: ∂_* ist Isomorphismus.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus $\tilde{\omega}_*(B_+^n) \cong \tilde{\omega}_*(B_-^n) \cong \{0\}$. ■

Während 3.14 und 3.16 für alle multiplikativen Homologietheorien h_* gelten, zwingt uns 3.15, mit der stabilen Homotopie ω_* zu arbeiten. Falls $l=1$ können wir aber auch anders argumentieren. Wie schon in 2.7b) bemerkt, gilt nämlich

$$J_{\gamma}^S \neq 0 \in \pi_0^S \iff \gamma^S \neq 0 \in \pi_0(GL) \cong \pi_0(GL(n)) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\iff \text{sign det } L(1) \neq \text{sign det } L(-1)$$

$$\iff d_+ := \deg F|_{\{1\} \times S^{n-1}} \neq \deg F|_{\{-1\} \times S^{n-1}} =: d_-$$

Betrachte nun für $n > 1$ (für $n=1$ sind nur kleine Modifikationen notwendig) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0 \times \Sigma_{n-1} \in H_{n-1}(S^0 \times S^{n-1}) & \xrightarrow{F_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus d_+ \cdot a + d_- \cdot b \\ \uparrow \alpha & \nearrow & \\ H_{n-1}(\{1\} \times S^{n-1}) \oplus H_{n-1}(\{-1\} \times S^{n-1}) & \cong & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus (a, b). \end{array}$$

α ist natürlich von den entsprechenden Einbettungen induziert. Man bestätigt leicht, daß gilt: $\alpha^{-1}(\Sigma_0 \times \Sigma_{n-1}) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$, also $F_*(\Sigma_0 \times \Sigma_{n-1}) \in \{d_+ - d_-, d_- - d_+\}$. Somit gilt Satz 2.6 im Fall $l=1$ auch mit $H_*(.; \mathbb{Z})$ statt ω_* .

3.17 Bemerkung: Offensichtlich liefern 3.13 bis 3.16 sogar die Äquivalenz

$$J_{\gamma}^S \neq 0 \iff f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0 \in \omega_{l+n-2}(\mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Dies ist natürlich nur sinnvoll, wenn γ^S existiert.

§ 4. Beispiele und Folgerungen aus dem Hauptsatz

In diesem Paragraphen sollen die Ergebnisse von § 2 veranschaulicht und ergänzt werden. Wir beginnen mit zwei Beispielen für $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$.

4.1 Beispiele: a) Seien $n=k=1$, $\Lambda := \mathbb{R}U(\omega) \cong S^1$, $E := \Lambda \times \mathbb{R}$, und

$$O := \mathbb{R}^2 - \{(0,2)\}, \quad O_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R} \text{ sowie}$$

$$f: O \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(\lambda, x) := \lambda x / [\lambda^2 + (x-2)^2].$$

f kann nicht stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden. Offensichtlich ist $f^{-1}(0) = O_0 \cup [\{0\} \times (\mathbb{R} - \{2\})]$. Wegen

$$D_x f(1,0) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad D_x f(-1,0) = -\frac{1}{5}$$

ist die Voraussetzung von Satz 2.6 und damit von Satz 2.3 erfüllt. $\mathcal{F}_1^+ = \{0\} \times (\mathbb{R}^+ - \{2\})$ und $\mathcal{F}_1^- = \{0\} \times \mathbb{R}^-$ sind minimal bezüglich $i_1(\mathcal{F})_*(\Sigma_0 \times \Sigma_0) \neq 0 \in H_0(O - (\mathcal{F} \cup O_0))$;

$$i_1(\mathcal{F}): S^0 \times S^0 \hookrightarrow O - (\mathcal{F} \cup O_0) = \mathbb{R}^2 - \{(0,2)\} - (\mathcal{F} \cup \mathbb{R} \times \{0\}).$$

$\mathcal{F}_2^+ = \{0\} \times]0,2[\subset \mathcal{F}_1^+$ und $\mathcal{F}_2^- = \{0\} \times \mathbb{R}^- \subset \mathcal{F}_1^-$ sind minimal bezüglich $i_2(\mathcal{F})_*(\Delta_1 \times \Sigma_0) \neq 0 \in H_1(O - O_0, O - (\mathcal{F} \cup O_0))$;

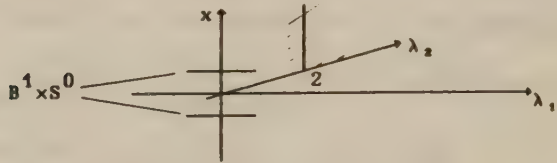
$$i_2(\mathcal{F}): (B^1 \times S^0, S^0 \times S^0) \hookrightarrow (O - O_0, O - (\mathcal{F} \cup O_0)) = \\ = (\mathbb{R}^2 - \{(0,2)\} - \mathbb{R} \times \{0\}, \mathbb{R}^2 - \{(0,2)\} - (\mathcal{F} \cup \mathbb{R} \times \{0\}))$$

Da diese Aussagen anschaulich klar sind, soll die einfache Berechnung obiger Homologiegruppen und Homomorphismen hier nicht durchgeführt werden. Sie folgen auch leicht aus Bemerkung 2.4e) und Satz 2.3. Man beachte, daß $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ ist.

Dieses Beispiel zeigt auch, daß $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ nicht eindeutig bestimmt sind, ja daß es sogar von der Wahl von $\mathcal{F}_1$ abhängen kann, ob $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ ist. $\mathcal{F}_1^- = \mathcal{F}_2^-$ kann auch aus der unten folgenden Proposition 4.3 oder aus Satz 2.3b), f) geschlossen werden.

b) Seien $n=1$, $k=2$, $l=1$, $\Lambda := \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong S^2$, $E = \Lambda \times \mathbb{R}$, sowie $O := \mathbb{R}^3 - \{(0,2)\} \times \mathbb{R}_0^+ \cong \mathbb{R}^3$, $O_0 = \mathbb{R}^2 - \{(0,2)\}$ und

$$f: O \rightarrow \mathbb{R}, f(\lambda_1, \lambda_2, x) := \begin{cases} \lambda_1 x / [\lambda_1^2 + (\lambda_2 - 2)^2] & x \geq 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$



Es ist $f^{-1}(0) = O_0 \cup \{(\lambda, x) \in O: \lambda_1 = 0, x \geq 0\}$. Nun folgt aus $f(1, 0, +1) = +1/5$ und $f(-1, 0, +1) = -1/5$ leicht $f_*(\Sigma_0 \times \Sigma_0) \neq 0$. Ebenso ist es nicht schwer zu bestätigen, daß

$$\mathcal{F}_1 = \{(\lambda_1, \lambda_2, x) \in O: \lambda_1 = 0, x > 0\} \text{ und}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2, x) \in O: \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 2, x > 0\}$$

minimal sind bezüglich der jeweiligen Bedingungen. Hier haben wir ein Beispiel dafür, daß

$$\mathcal{F}_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in O_0: \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 2\}$$

$$\subset \{(\lambda_1, \lambda_2) \in O: \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 2\} = \mathcal{F}_1.$$

Wie in Satz 2.3e) gezeigt, gilt $c_2(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1) \neq 0$, aber andererseits $c_1(\mathcal{F}_2)_*(\Delta_1) = 0$; zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} c_2(\mathcal{F}_2): (B^1, S^0) &\hookrightarrow (O_0, O_0 - \mathcal{F}_2) = \\ &= (\mathbb{R}^2 - \{(0,2)\}, \mathbb{R}^2 - \{0\} \times]-\infty, 2]) \end{aligned}$$

$$c_1(\mathcal{F}_2): S^0 \hookrightarrow O_0 - \mathcal{F}_2 = \mathbb{R}^2 - \{0\} \times]-\infty, 2].$$

Dies liegt daran, daß es zwar einen Weg von $+1$ nach -1 in $O_0 - \mathcal{F}_2$ gibt, daß sich aber der durch B^1 gegebene Weg nicht innerhalb von O_0 zu einem Weg in $O_0 - \mathcal{F}_2$ deformieren läßt, wenn S^0 dabei $O_0 - \mathcal{F}_2$ nicht verlassen darf. Auch hier soll wegen der Anschaulichkeit des Sachverhalts der Beweis nicht "vorgerechnet" werden. ■

In den nächsten zwei Propositionen wird gezeigt, wie Teile von Satz 2.3 verschärft werden können, wenn mehr über die Topologie von O und O_0 bekannt ist. Dabei sei $f: O \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in § 1 mit $f_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$, so daß Satz 2.3 anwendbar ist.

4.2 Proposition: Sei $O_0 = \Lambda$. Dann kehrt $\mathcal{Y}_1$ immer zu O_0 zurück. das heißt es gilt immer $\bar{\mathcal{Y}}_1 \cap (O_0 - B^1) \neq \emptyset$.

Beweis: Nach Satz 2.3e) gilt $c_1(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{l-1}) \neq 0 \in h_{l-1}(O_0 - \mathcal{Y}_1)$. Wäre nun $\bar{\mathcal{Y}}_1 \cap (\Lambda - B^1) = \emptyset$, so folgte $\mathcal{Y}_1 = \{\lambda_0\}$. Das impliziert aber $c_1(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{l-1}) = 0$, wie im Beweis von Korollar 3.7 gezeigt wurde. ■

In Beispiel 4.5 werden wir zeigen, daß $\mathcal{Y}_2$ nicht notwendig zu O_0 zurückkehrt, wenn $O_0 = \Lambda$ ist.

4.3 Proposition: Sei $O \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Dann läßt sich 2.3f) verschärfen zu: $\bar{\mathcal{Y}}_2 \cap \text{rd}(O) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$.

Hier wird $\text{rd}(O)$ bezüglich $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ gebildet.

Beweis: Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 h_{l+n-1}(B^{l-1} \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_0} & h_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1}) \\
 \downarrow i_2(\mathcal{Y}_2)_* & & \downarrow i_1(\mathcal{Y}_2)_* \\
 h_{l+n-1}(O - O_0, O - (\mathcal{Y}_2 \cup O_0)) & \xrightarrow{\partial_1} & h_{l+n-2}(O - (\mathcal{Y}_2 \cup O_0)) \\
 \downarrow i_* & & \downarrow \\
 h_{l+n-1}(\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n - \{0\}), \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n - (\mathcal{Y}_2 \cup \mathbb{R}^k)) & \xrightarrow{\partial_2} & h_{l+n-2}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n - (\mathcal{Y}_2 \cup \mathbb{R}^k))
 \end{array}$$

Die Behauptung folgt ähnlich wie im Beweis von 3.10 aus der Injektivität von $\partial_2 \circ i_*$, denn dann ist $i_1(\mathcal{Y}_2)_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$,

also $\gamma_2 \in A_1$. i_2 ist aber sogar ein Ausschneidungsisomorphismus, denn wegen $\bar{\gamma}_2 \cap \text{rd}(O) = \emptyset$, also $\gamma_2 \cup \mathbb{R}^k = \bar{\gamma}_2 \cup \mathbb{R}^k$, können wir $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n - (O \cup \mathbb{R}^k)$ ausschneiden.

Die Injektivität von ∂_2 sieht man so:

$$\begin{array}{ccc}
 h_{1+n-1}(\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n - \{O\})) & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & h_{1+n-1}(\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n - \{O\}), \{1\} \times S^{n-1}) \cong \{ & \\
 & \swarrow & \\
 h_{1+n-1}(\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n - \{O\}), \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n - (\gamma_2 \cup \mathbb{R}^k)) & & \\
 \downarrow \partial_2 & & \\
 h_{1+n-2}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n - (\gamma_2 \cup \mathbb{R}^k)) & &
 \end{array}$$

Die linke Spalte ist exakt, also $\text{Kern } \partial_2 \cong \{0\}$. ■

Nun folgt ein Beispiel dafür, wie zusätzliche Informationen über die Abbildung f genutzt werden können. $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei wie in § 1 ($O=E$, $l=1$) mit $f_*(\Sigma_0 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$.

4.4 Proposition: Es gebe eine reelle Zahl $R > 0$ mit $\|v\| < R$ für alle Nullstellen $v \in O=E$ von f (a-priori-Abschätzung); $\|\cdot\|$ sei wie schon in Proposition 3.10 von einer Riemannschen Metrik auf E induziert. Nach Proposition 3.10 ist $\gamma_1 = \gamma_2 =: \gamma$. Sei C_+ (bzw. C_-) die Wegkomponente von $+1$ (bzw. -1) in $\Lambda - \gamma$, wobei $\gamma := \bar{\gamma} \cap \Lambda$. Sei $p: E \rightarrow \Lambda$ die Projektion. Dann ist C_+ oder C_- in $p(\gamma)$ enthalten, das heißt γ überdeckt C_+ oder C_- . Anders ausgedrückt: Falls es $\lambda_+ \in C_+$ gibt mit $p^{-1}(\lambda_+) \cap \gamma = \emptyset$, so gilt für alle $\lambda \in C_-$ $p^{-1}(\lambda) \cap \gamma \neq \emptyset$.

Beweis: Angenommen, es gäbe $\lambda_+ \in C_+$, $\lambda_- \in C_-$ mit $p^{-1}(\lambda_+) \cap \mathcal{F} = \emptyset$ und $p^{-1}(\lambda_-) \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Dann läßt sich die Sphäre $\{+1\} \times S^{n-1}$ innerhalb von $E-(\mathcal{F} \cup E_0)$ in die Sphäre $\{-1\} \times S^{n-1}$ deformieren - im Widerspruch zu $i_*(\mathcal{F})_*(\Sigma_0 \times \Sigma_{n-1}) \neq 0$; zur Erinnerung:

$$i_*(\mathcal{F})_*: h_{n-1}(\dot{S}^0 \times S^{n-1}) \longrightarrow h_{n-1}(E-(\mathcal{F} \cup E_0)).$$

Dazu wähle man Wege

$$w_+: I \longrightarrow C_+, \quad w_+(0) = +1, \quad w_+(1) = \lambda_+, \quad \text{und}$$

$$w_-: I \longrightarrow C_-, \quad w_-(0) = -1, \quad w_-(1) = \lambda_-.$$

Ist $\lambda_+ \neq +1$ bzw. $\lambda_- \neq -1$, so sieht man leicht, daß w_+ bzw. w_- injektiv gewählt werden können. In diesem Fall sind w_+ bzw. w_- Einbettungen, und das Bündel ist trivial über $w_+(I)$ bzw. $w_-(I)$. Sei $\epsilon := \frac{1}{2} \cdot \min\{|v|: v \in \mathcal{F}, p(v) \in w_+(I) \cup w_-(I)\} > 0$.

Im folgenden schreiben wir $A \simeq B$, falls sich A innerhalb von $E-(\mathcal{F} \cup E_0)$ in B deformieren läßt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \{+1\} \times S^{n-1} &\simeq \{+1\} \times \epsilon \cdot S^{n-1} \simeq \{\lambda_+\} \times \epsilon \cdot S^{n-1} \simeq \{\lambda_+\} \times R \cdot S^{n-1} \\ &\simeq \{+1\} \times R \cdot S^{n-1} \simeq \{-1\} \times R \cdot S^{n-1} \simeq \dots \simeq \{-1\} \times S^{n-1} \end{aligned}$$

Die erste Deformation ist klar, für die zweite beachte man, daß $\{v \in E: p(v) \in w_+(I), |v| = \epsilon\} \simeq I \times S^{n-1}$ ist, falls $\lambda_+ \neq +1$. Die dritte existiert, da $p^{-1}(\lambda_+) \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Die weiteren Homotopien werden entsprechend gebildet. ■

Den Abschluß des Paragraphen bildet ein Beispiel, das unter anderem zeigt, daß in Proposition 4.3 die Voraussetzung $0 \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ nötig ist.

4.5 Beispiel: Seien $n=k=1$. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\lambda, x) := x \cdot \sin \lambda.$$

$\tilde{f}$ ist 2π -periodisch in λ , $\tilde{f}^{-1}(0) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$. Wegen $D_x \tilde{f}(1, 0) = \sin(1) > 0 > \sin(-1) = D_x \tilde{f}(-1, 0)$ kann Satz 2.6

und damit Satz 2.3 angewandt werden. Man bestätigt leicht, daß $\mathcal{Y}_1^+ = \mathcal{Y}_2^+ = \{0\} \times \mathbb{R}^+$ und $\mathcal{Y}_1^- = \mathcal{Y}_2^- = \{0\} \times \mathbb{R}^-$ die möglichen minimalen Verzweigungsmengen sind. Da $\tilde{f}$ 2π -periodisch in λ ist, folgt natürlich, daß auch von allen Punkten $(2m\pi, 0)$, $m \in \mathbb{Z}$, entsprechende Mengen abzweigen. Die Periodizität von $\tilde{f}$ zusammen mit Satz 2.3 angewandt auf $\tilde{f}$ liefert keinen Hinweis auf die anderen Verzweigungspunkte $((2m+1)\pi, 0)$, $m \in \mathbb{Z}$. $\tilde{f}$ induziert aber eine stetige Abbildung

$$f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

auf die ebenfalls die Sätze 2.6 und 2.3 angewandt werden können, da $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$. Die induzierten Verzweigungsmengen sind $\{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^+$ und $\{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^-$. Nach Proposition 4.2 gilt aber $\mathcal{Y}_1 \cap (0_0 - B^1) \neq \emptyset$. Somit muß $\mathcal{Y}_1$ echt größer sein als $\{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^+$ oder $\{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^-$ und kann als Teilmenge von $\{\bar{0}, \bar{\pi}\} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ nicht zusammenhängend sein. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß nur $\mathcal{Y}_1^+ = \{\bar{0}, \bar{\pi}\} \times \mathbb{R}^+$ und $\mathcal{Y}_1^- = \{\bar{0}, \bar{\pi}\} \times \mathbb{R}^-$ die Bedingungen von Satz 2.3 an die Verzweigungsmenge $\mathcal{Y}_1$ erfüllen.

Andererseits bestätigt man leicht, daß die beiden Mengen $\mathcal{Y}_2^+ = \{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^+$ und $\mathcal{Y}_2^- = \{\bar{0}\} \times \mathbb{R}^-$ minimal sind bezüglich der Bedingung $i_*(\mathcal{Y}_2)_*(\Delta_1 \times \Sigma_0) \neq 0$.

Dieses Beispiel zeigt einmal, daß Proposition 4.2 nicht für $\mathcal{Y}_2$ gilt. Außerdem zeigt es wie angekündigt, daß die Voraussetzung an 0 in Proposition 4.3 nicht ersatzlos gestrichen werden darf. Wichtiger ist aber wohl, daß das Einbringen der Eigenschaft " $\tilde{f}$ 2π -periodisch" mehr Information gibt als nur die entsprechenden Translationen der vom Ursprung abzweigenden Menge.

Die Periodizität von $\tilde{f}$ in obigem Beispiel kann wie folgt formuliert werden. Z operiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$Z \times \mathbb{R} \ni (m, \lambda) \mapsto \lambda + 2m\pi \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R}$ mit dieser Operation werde mit V_1 bezeichnet, $\mathbb{R}$ mit der trivialen Operation mit V_2 . Dann besagt die Periodizität von f gerade, daß $f: V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$ äquivariant ist. Satz 2.3 ließ sich anwenden, weil $(V_1 \times V_2)/Z \cong S^1 \times \mathbb{R}$ ein Vektorraumbündel über der geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit S^1 ist. In Kapitel III werden wir Verzweigung für äquivariante Abbildungen untersuchen, wobei Z durch eine kompakte Lie-Gruppe G ersetzt wird. Das Beispiel 4.5 wird also von Kapitel III nicht erfaßt, da Z nicht kompakt ist. Außerdem interessieren wir uns in Kapitel III vor allem für Situationen, in denen G auch auf $\mathbb{R}^n$ operiert. Trotzdem mögen diese Betrachtungen eine gewisse Erwartungshaltung motivieren.

KAPITEL II. HILFSMITTEL AUS DER ÄQUIVARIANTEN

ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Im gesamten Kapitel sei G eine kompakte Lie-Gruppe.

§ 1. Äquivariante stabile (Ko-) Homotopietheorie

Wir stellen in diesem Paragraphen die für Kapitel III nötigen Bezeichnungen und Ergebnisse zusammen. Beweise werden nur für die Aussagen geführt, die in der Literatur nicht vorhanden sind. Für eine erste Einführung verweisen wir auf Adams [2] und die dort erwähnten Arbeiten, vor allem auf Lewis/May/Steinberger [35], die weit über das von uns Benötigte hinausgehen.

1.1 Bezeichnungen: a) Ein G -Raum X ist ein topologischer Raum, auf dem G stetig von links operiert: $G \times X \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in X$, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, $e \cdot x = x$; e das neutrale Element von G . Eine G -Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen G -Räumen X und Y ist eine äquivariante (das heißt $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ für $g \in G$ und $x \in X$) stetige Abbildung; wir schreiben oft $f: X \xrightarrow{G} Y$. Operiert G trivial auf Y ($g \cdot y = y$ für alle $g \in G$, $y \in Y$), so nennen wir $f: X \xrightarrow{G} Y$ invariant.

G -Räume und G -Abbildungen bilden eine Kategorie GTG . Isomorphie in GTG wird mit " $\cong$ " bezeichnet; also $X \cong Y$, wenn es einen äquivalenten Homöomorphismus zwischen X und Y gibt [die Umkehrabbildung ist automatisch äquivariant].

Die Kategorie GTG^2 aller G -Paare besitzt als Objekte Paare (X, A) von G -Räumen $A \subseteq X$ (das heißt die Operation

von G auf A ist die Einschränkung der Operation von G auf X , A ist invariante Teilmenge von X) und Morphismen $f: (X, A) \xrightarrow{G} (Y, B)$ mit äquivariantem f und $f(A) \subset B$. Die Kategorie GTO_1^* der punktierten G -Räume ist eine volle Unterkategorie von GTO_1^2 mit Objekten $(X, x_0) \hat{=} (X, \{x_0\})$, $x_0 \in X$. Man beachte, daß hierzu $\{x_0\}$ G -Raum sein muß, das heißt x_0 muß Fixpunkt der Operation von G auf X sein. Es gibt einen Funktor

$$GTO_1 \longrightarrow GTO_1^*, X \mapsto X^+, f \mapsto f^+,$$

wobei $X^+ := (X \cup \{*\}, *)$, $\{*\}$ trivialer G -Raum; und für $f: X \xrightarrow{G} Y$ ist $f^+: X^+ \xrightarrow{G} Y^+$, $f^+|_X := f$, $f^+(*) := *$.

- b) Mit $A, B \subseteq X$ sind offenbar $\bar{A}$, $\bar{A}$, $rd(A)$, $A \cup B$, $A \cap B$, $X - A$ und X/A wieder G -Räume. X/A besitzt einen kanonischen Basispunkt $\{A\}$. Für $f: X \xrightarrow{G} Y$ und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sind $f(A) \subseteq Y$ und $f^{-1}(B) \subseteq X$. Weiter liegt die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ zweier G -Räume X, Y in GTO_1 . Die Operation von G auf $X \sqcup Y$ wird von denen auf X und Y induziert. Ebenso liegt das kartesische Produkt $X \times Y$ in GTO_1 ; G operiert diagonal, das heißt $g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y)$. Entsprechend existieren in GTO_1^* der Wedge

$$X \vee Y := (X \sqcup Y) / (x_0 \sim y_0) \cong X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$$

und das Smash-Produkt

$$X \wedge Y := (X \times Y) / (X \vee Y)$$

zweier punktierter G -Räume X, Y . Außerdem benötigen wir den Abbildungskegel Cf für $f: X \xrightarrow{G} Y$ punktiert:

$$Cf := [(X \wedge (I, 0)) \vee Y] / [(x, 1) \sim f(x)].$$

$I = [0, 1]$ sei mit der trivialen G -Operation versehen.

- c) Homotopie von Abbildungen ist in allen drei Kategorien GTO_1 , GTO_1^2 , GTO_1^* wie üblich erklärt. Mit $[X, Y]_G$ wird

die Menge der G -Homotopieklassen von G -Abbildungen $X \xrightarrow{G} Y$ bezeichnet. Analog schreiben wir $[(X,A),(Y,B)]_G$ in GTO_2^2 und $[X,Y]_G^*$ in GTO_2^* .

d) Wir schreiben $H \triangleleft G$, falls H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist. Insbesondere ist dann H ebenfalls eine kompakte Lie-Gruppe. Mit NH bezeichnen wir den Normalisator, mit $WH := NH/H$ die Weyl-Gruppe von H in G .

e) Ist X ein G -Raum, $x \in X$, so wird mit

$Gx := \{g \cdot x \in X : g \in G\} \stackrel{G}{\subset} X$ der Orbit von x und mit

$G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\} \triangleleft G$ die Stand- oder Isotropiegruppe von x bezeichnet.

$X^G := \{x \in X : \forall g \in G : g \cdot x = x\}$ ist die Fixpunktmenge der Operation; allgemeiner betrachten wir für $H \triangleleft G$

$X^H := \{x \in X : \forall h \in H : h \cdot x = x\}$, die H -Fixpunktmenge.

Eine G -Abbildung $f: X \xrightarrow{G} Y$ induziert für alle $H \triangleleft G$ eine stetige Abbildung $f^H := f|_{X^H}: X^H \longrightarrow Y^H$. X^H und Y^H sind sogar WH -Räume, und f^H ist eine WH -Abbildung, was wir aber nicht benötigen.

$X/G := \{Gx : x \in X\}$ sei der Orbitraum, versehen mit der von $p: X \longrightarrow X/G$ induzierten Topologie. Es gilt (siehe etwa Bredon [10], Theorem I.3.1):

X Hausdorffsch $\Rightarrow X/G$ Hausdorffsch,

p ist abgeschlossen und eigentlich (das heißt Urbilder kompakter Mengen sind kompakt),

X (lokal)kompakt $\Rightarrow X/G$ (lokal)kompakt.

Operiert eine Gruppe G' von rechts auf dem G -Raum X , und ist Y G' -Raum, so ist

$$X \times_{G'} Y := (X \times Y) / (xg', y) \sim (x, g'y)$$

G -Raum bezüglich der Operation $g \cdot [x, y] := [gx, y]$.

f) Ein G -Modul V ist ein endlich-dimensionaler reeller euklidischer Vektorraum, auf dem G orthogonal operiert, das heißt $V \cong \mathbb{R}^n$ und $G \rightarrow O(n)$ ist eine Darstellung von G für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Da stetige Homomorphismen von Lie-Gruppen ($G \rightarrow O(n)$) automatisch differenzierbar sind, und da die Operation $O(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(A, v) \mapsto A \cdot v$, ebenfalls differenzierbar ist, operiert G differenzierbar auf V .

Mit $|V|$ bezeichnen wir die Dimension von V .

Für $H < G$ ist V^H ein Untervektorraum von V , aber im allgemeinen kein G -Untermodul (V^H ist WH -Modul).

Zwei G -Moduln V, W heißen isomorph, $V \cong W$, wenn es einen äquivarianten Vektorraumisomorphismus $V \xrightarrow{G} W$ gibt.

Für die Theorie von Darstellungen kompakter Lie-Gruppen verweisen wir auf Bröcker/tom Dieck [11], wo auch die folgende Konstruktion beschrieben wird (§ II.7).

Bezeichnet man mit $[V]$ die Isomorphieklasse von V und mit $RO^+(G)$ die Menge aller $[V]$, so induziert das kartesische Produkt eine Addition

$$([V], [W]) \mapsto [V] + [W] := [V \times W]$$

und das Tensorprodukt eine Multiplikation

$$([V], [W]) \mapsto [V] \cdot [W] := [V \otimes W]$$

in $RO^+(G)$. Führt man mit Hilfe der Grothendieck-Konstruktion formale Inverse $-[V]$ ein, so erhält man den reellen Darstellungsrings $RO(G)$. Elemente von $RO(G)$ sind also formale Differenzen (virtuelle G -Moduln) $[V] - [W]$. Die 0 in $RO(G)$ ist natürlich die Isomorphieklasse des nulldimensionalen G -Moduls $\{0\}$, die 1 in $RO(G)$ die des eindimensionalen G -Moduls $\mathbb{R}$, versehen mit der trivialen G -Operation. Versieht man allgemein $\mathbb{R}^n$ mit der trivialen

G-Operation, so erhält man einen Ringmonomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \text{RO}(G), n \mapsto \begin{cases} [\mathbb{R}^n] & n \geq 0 \\ -[\mathbb{R}^{-n}] & n < 0 \end{cases}$$

Wir schreiben oft n für das Bild von $n \in \mathbb{Z}$ unter diesem Ringmonomorphismus.

g) Für einen G-Modul V seien

$$S_V := \{v \in V : \|v\| = 1\},$$

$$B_V := \{v \in V : \|v\| \leq 1\},$$

$$S^V := V \cup \{\infty\} \text{ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von } V.$$

Alle diese Räume sind G-Räume (da G orthogonal und somit normerhaltend operiert), wobei G trivial auf ∞ operiere. Wegen f) handelt es sich sogar um differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten, das heißt es sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten und die Operation ist differenzierbar. S^V wird immer als punktierter G-Raum aufgefaßt mit dem Basispunkt ∞ . S_V kann genau dann mit einem Basispunkt versehen werden, wenn $S_V^G := (S_V)^G = S_{(V^G)} \neq \emptyset$, das heißt wenn $V^G \neq \{0\}$. Ist das der Fall, also etwa $V \cong \mathbb{R} \times V_0$, so gilt $S_V \stackrel{G}{\cong} S^{V_0} = V_0 \cup \{\infty\}$; die stereographische Projektion, die $(1,0) \in \mathbb{R} \times V_0$ auf ∞ abbildet, ist offensichtlich äquivariant. Sie ist punktiert, wenn S_V mit dem Basispunkt $(1,0)$ versehen wird.

Weiter gilt für G-Moduln V, W :

$$S^V \wedge S^W = (V \cup \{\infty\}) \wedge (W \cup \{\infty\}) \stackrel{G}{\cong} (V \times W) \cup \{\infty\} = S^{V \times W},$$

$$S_V \ast S_W = B_V \times S_W \cup S_V \times B_W \stackrel{G}{\cong} S_{V \times W}.$$

[Die üblichen Homomorphismen sind automatisch äquivariant.] Für einen punktierten G-Raum X sei $S^V X := S^V \wedge X$ die V -fache Einhängung von X . Für $V \cong \mathbb{R}^n$ ist $S^V \stackrel{G}{\cong} S^n$ und somit $S^V X \stackrel{G}{\cong} S^n X$ die bekannte n -fache (reduzierte) Einhängung.

Hier wurde S^n mit $S^{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ identifiziert. Das entspricht unserer Konvention in f).

h) Für einen G -Modul V und einen punktierten G -Raum X sei

$$\pi_V^G(X) := [S^V, X]_G^*.$$

Dies ist eine Gruppe, falls $|V^G| \geq 1$ und abelsch falls $|V^G| \geq 2$. Ist W ein weiterer G -Modul, so induziert die Einhängung mit S^W einen Homomorphismus

$$\pi_V^G(X) \longrightarrow \pi_{W \otimes V}^G(S^W X).$$

Wir verweisen für all das auf Hauschild [17]. Dort werden auch äquivariante Freudenthalsche Einhängungssätze bewiesen sowie relative Homotopiegruppen $\pi_V^G(X, A)$, wobei $* \in A \subseteq X$, definiert und Ausschneidungssätze hergeleitet.

1.2 Definition: Eine äquivariante Homologietheorie - im Sinne

von Bredon [9] - besteht aus einer Folge kovarianter Funktoren $h_n^G: G\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}^2 \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}$,

und natürlichen Transformationen

$$\partial = \partial_{X,A}: h_n^G(X, A) \longrightarrow h_{n-1}^G(A), \quad (X, A) \in G\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}^2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

mit den Eigenschaften

i) $f_* \stackrel{G}{\simeq} f_! : (X, A) \xrightarrow{G} (Y, B) \Rightarrow f_{\circ,*} = f_{!,*} : h_*^G(X, A) \rightarrow h_*^G(Y, B)$

ii) Für alle G -Paare (X, A) ist die folgende Sequenz exakt.

$$\dots \rightarrow h_{n+1}^G(X, A) \xrightarrow{\partial} h_n^G(A) \xrightarrow{i_*} h_n^G(X) \xrightarrow{j_*} h_n^G(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}^G(A) \rightarrow \dots$$

wobei $i: A \xrightarrow{G} X$, $j: X = (X, \emptyset) \xrightarrow{G} (X, A)$.

iii) Für $U \subseteq A \subseteq X$ mit $\bar{U} \subset \bar{A}$ induziert die Einbettung

$i: (X-U, A-U) \xrightarrow{G} (X, A)$ einen Isomorphismus

$$i_*: h_*^G(X-U, A-U) \longrightarrow h_*^G(X, A).$$

1.3 Beispiele: Ist h_* eine nichtäquivariante Homologietheorie,

definiert auf der Kategorie aller Raumpaare, so liefern die folgenden Definitionen äquivariante Homologietheorien.

$$1. h_*^G(X, A) := h_*(X, A)$$

Hier wird die Operation von G auf X einfach vergessen.

$$2. h_*^G(X, A) := h_*(X/G, A/G)$$

$$3. h_*^G(X, A) := h_*(EG \times_G X, EG \times_G A)$$

Hier ist EG ein freier G -Raum, der äquivariant zusammenziehbar ist. Dies ist die Borel-Konstruktion.

Für eine äquivariante Homologietheorie erhalten wir rein formal die üblichen Sätze aus Eilenberg/Steenrod [16], Kapitel I, wie etwa die exakte Sequenz eines Tripels, die absolute und relative Mayer-Vietoris-Sequenz usw. Nur bei den Eigenschaften der reduzierten Homologie muß man etwas aufpassen, da nicht alle G -Räume punktiert sind.

1.4 Definition: Sei h_*^G eine äquivariante Homologietheorie, P ein einpunktiger Raum mit trivialer G -Operation. Dann definieren wir für einen G -Raum X

$$\tilde{h}_*^G(X) := \text{Kern } [c_*^X: h_*^G(X) \longrightarrow h_*^G(P)],$$

wobei $c^X: X \xrightarrow{G} P$ die konstante Abbildung ist.

1.5 Proposition: Seien G -Räume X, Y , eine G -Abbildung $f: X \xrightarrow{G} Y$ sowie G -Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $X = A \cup B$ gegeben.

a) Für $f_*: h_*^G(X) \longrightarrow h_*^G(Y)$ gilt: $f_*(\tilde{h}_*^G(X)) \subset \tilde{h}_*^G(Y)$.

b) Für den Randoperator $\partial: h_{n+1}^G(X, A) \longrightarrow h_n^G(A)$ gilt:

$$\text{Bild } \partial \subset \tilde{h}_n^G(A).$$

c) Ist $A^G \neq \emptyset$, so ist die reduzierte Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow h_{n+1}^G(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_n^G(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{h}_n^G(X) \xrightarrow{j_*} h_n^G(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{n-1}^G(A) \rightarrow \dots$$

exakt.

d) Ist $(X; A, B)$ h_*^G -ausschneidend, zum Beispiel $X = A \cup B$, und gilt $A^G \cap B^G \neq \emptyset$, dann ist die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{h}_{n+1}^G(X) \rightarrow \tilde{h}_n^G(A \cap B) \rightarrow \tilde{h}_n^G(A) \oplus \tilde{h}_n^G(B) \rightarrow \tilde{h}_n^G(X) \rightarrow \dots$$

exakt.

e) Ist $X^G \neq \emptyset$, $x_0 \in X^G$, so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_*^G(X) &\cong h_*^G(X, \{x_0\}) \quad \text{und} \\ h_*^G(X) &\cong \tilde{h}_*^G(X) \oplus h_*^G(P). \end{aligned}$$

Beweis: Die üblichen Beweise übertragen sich, siehe etwa Dold [15], III.4.4, 8.15. Für c), d) und e) benötigt man Abbildungen $P \xrightarrow{G} A$, $P \xrightarrow{G} A \cap B$, $P \xrightarrow{G} X$. Diese existieren genau dann, wenn A^G , $A^G \cap B^G$, X^G nicht leer sind. ■

Eine weitere Besonderheit betrifft das Dimensionsaxiom, das im äquivarianten Kontext wie folgt lautet.

1.6 Definition: Eine äquivariante Homologietheorie h_*^G erfüllt das Dimensionsaxiom, falls für alle $H < G$ und $n \neq 0$ gilt:

$$h_n^G(G/H) \cong \{0\}.$$

Von den in Beispiel 1.3 genannten Theorien mit $h_* = H_*(.; \mathbb{Z})$, singuläre Homologie, erfüllt die erste genau dann das Dimensionsaxiom, wenn G endlich ist, die zweite für beliebiges G und die dritte nur für triviales $G = \{e\}$.

Es ist klar, was eine äquivariante Kohomologietheorie h_G^* ist, und daß sich alles bisher Gesagte übertragen läßt. Das wohl bekannteste Beispiel einer äquivarianten Kohomologietheorie ist die Borel-Kohomologie $h_G^*(X, A) := H^*(EG \times_G X, EG \times_G A)$.

Wir kommen nun zur Definition der äquivarianten stabilen (Ko-) Homotopiegruppen. Dazu sei $\{V_j : j \in J\}$ eine vollständige Menge paarweise nicht isomorpher irreduzibler G -Moduln. Das heißt alle V_j sind irreduzibel, und jeder irreduzible G -Modul ist zu genau einem V_j isomorph. Wir setzen $\mathcal{U} := \bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_j^n$. $\mathcal{U}$ ist ein euklidischer Vektorraum mit dem von den Skalarprodukten in V_j induzierten Skalarprodukt. Jeder G -Modul ist isomorph zu einem endlich-dimensionalen Teilraum von $\mathcal{U}$. Mit $\mathcal{U}_f$ bezeichnen wir die Menge aller endlich-dimensionalen G -Untervektorräume von $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ ist ein vollständiges G -Universum im Sinne von Lewis/May [35]. Wir können $RO(G)$ als freie abelsche Gruppe erzeugt von den V_j , $j \in J$, auffassen (siehe Bröcker/tom Dieck [11], II.7). Jedes Element α von $RO(G)$ werde repräsentiert durch ein Paar (V, V') fest gewählter Untermoduln $V, V' \in \mathcal{U}_f$, $\alpha = [V] - [V']$.

1.7 Definition: Seien $\alpha = [V] - [V'] \in RO(G)$, $(X, A) \in G\mathcal{U}\mathcal{O}^2$,

$i: A^+ \xrightarrow{G} X^+$, Ci der Abbildungskegel. Dann heißt

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^G(X, A) &:= \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{U}_f} [S^W \wedge S^V, S^W \wedge S^{V'} \wedge Ci]_G^* \approx \\ &\approx \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{U}_f} \pi_{W \times V}^G(S^W S^{V'} Ci) \end{aligned}$$

die äquivariante stabile Homotopiegruppe von (X, A) zum Index α .

1.8 Erläuterung: a) Für $W, W' \in \mathcal{U}_f$ mit $W \subset W'$ bezeichne $W'-W$ das orthogonale Komplement von W in W' . Dann induziert die $(W'-W)$ -fache Einhängung einen Homomorphismus (von abelschen Gruppen, falls $|W^G| + |V^G| \geq 2$; siehe Bemerkung 1.1h))

$$\pi_{W \times V}^G(S^W S^{V'} Ci) \longrightarrow \pi_{W' \times V}^G(S^{W'} S^{V'} Ci).$$

Der Kolimes in Definition 1.7 wird von diesen Homomorphismen induziert.

b) Hält man $\alpha \in RO(G)$ fest, so kann man für $n \in \mathbb{Z} \subset RO(G)$ $h_n^G := \omega_{\alpha+n}^G$ setzen und dies in der üblichen Weise zu einer äquivarianten Homologietheorie im Sinne von Definition 1.2 erweitern, die natürlich von α abhängt. Man erhält somit eine ganze Familie äquivarianter Homologietheorien oder eine über $RO(G)$ graduierte Homologietheorie. Die übliche Definition von $RO(G)$ -graduierten Theorien enthält noch etwas mehr Struktur (siehe etwa Wirthmüller [53]), die wir aber nicht benutzen werden. In unseren Anwendungen in Kapitel III werden G -Moduln $\Lambda \cong \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ und V fest vorgegeben sein. In diesem Fall benutzen wir die vereinfachte Schreibweise $\omega_{\Lambda_0+V+n}^G$ statt $\omega_{[\Lambda_0]+[V]+n}^G$ oder $\omega_{\Lambda-\Lambda_0+n}^G$ statt $\omega_{[\Lambda]-[\Lambda_0]+n}^G = \omega_{[\Lambda_1]+n}^G$. Wir können dafür ohne Einschränkungen annehmen, daß $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda, V \in \mathcal{U}_f$ gerade die entsprechenden Elemente in $RO(G)$ repräsentieren. Andere Indizes werden wir nicht benötigen.

c) Ist $j: A \xrightarrow{G} X$ eine G -Kofaserung, $i: A^+ \xrightarrow{G} X^+$, so folgt wie üblich in $GJO\mathfrak{P}^*$ $Ci \xrightarrow{G} Ci/CA \xrightarrow{G} X/A$; vergleiche Whitehead [48], I.5.13. Dabei heißt $j: A \xrightarrow{G} X$ G -Kofaserung, falls für alle G -Räume Y , alle $f: X \xrightarrow{G} Y$ und alle $h: A \times I \xrightarrow{G} Y$ mit $h|_{A \times \{0\}} = f|_A$ eine Erweiterung $H: X \times I \xrightarrow{G} Y$ existiert mit $H|_{X \times \{0\}} = f$.

In analoger Weise definieren wir:

1.9 Definition: Seien $\alpha = [V] - [V'] \in RO(G)$, $(X, A) \in GJO\mathfrak{P}^2$,

$i: A^+ \xrightarrow{G} X^+$, Ci der Abbildungskegel. Dann heißt

$$\omega_G^\alpha(X, A) := \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{U}_f} [S^W \wedge S^{V'} \wedge Ci, S^W \wedge S^V]_G^*$$

die äquivariante stabile Kohomotopiegruppe von (X, A) zum Index α .

Wir erhalten eine $RO(G)$ -graduierte äquivariante Kohomologietheorie, die äquivariante stabile Kohomotopie. Wieder soll das bei uns nur heißen, daß für alle $\alpha \in RO(G)$ ω_G^α definiert ist, und daß $\omega_G^{\alpha+n}$, $n \in \mathbb{Z}$, für festes α zu einer äquivarianten Kohomologietheorie erweitert werden kann. Wir werden die entsprechende vereinfachte Schreibweise von Bemerkung 1.8b) benutzen.

Diese Theorien wurden für G endlich von Segal [45] eingeführt, der auch die Gruppe $\omega_G^0(P)$ berechnete (P einpunktiger G -Raum); siehe Bemerkung 1.15a). In der Folge erschienen zahlreiche ausführlichere Studien wie etwa die von Hauschild [18] oder Kosniowski [31].

Sind $\alpha, \beta \in RO(G)$ und (X, A) , (Y, B) G -Raumpaare, so induziert das Smash-Produkt wie in der nicht-äquivarianten Situation (vergleiche etwa Switzer [46], Kapitel XIII) ein $\times$ -Produkt

$$x: \omega_\alpha^G(X, A) \otimes \omega_\beta^G(Y, B) \longrightarrow \omega_{\alpha+\beta}^G(X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

falls $(X \times B \cup A \times Y; X \times B, A \times Y)$ $\omega_\star^G$ -ausschneidend ist. (Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn A oder B leer ist, was bei uns immer zutreffen wird.) Durch das $\times$ -Produkt wird

$$R := \omega_\star^G(P) = \bigotimes_{\alpha \in RO(G)} \omega_\alpha^G(P), \quad P = \{*\},$$

zu einem Ring mit $1 \in \omega_0^G(P) \cong \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{U}_f} [S^W, S^W]_G^*$ - die 1 induziert

von $\operatorname{id}: S^0 \xrightarrow{G} S^0$ - und $\omega_\star^G(X, A)$ wird zu einem R -Bimodul. Das $\times$ -Produkt ist natürlich in (X, A) und (Y, B) , insbesondere induzieren Abbildungen $f: (X, A) \xrightarrow{G} (Y, B)$ R -Bimodul-Homomorphismen $f_\star$. Wegen der Assoziativität induziert das $\times$ -Produkt auch einen R -Bimodul-Homomorphismus

$$x: \omega_\star^G(X, A) \otimes_R \omega_\star^G(Y, B) \longrightarrow \omega_\star^G(X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Entsprechendes gilt auch für ω_G^* ; außerdem gibt es noch U - und $\cap$ -Produkte. Wir führen das nicht näher aus, da wir diese Produkte nicht explizit benötigen - implizit gehen sie allerdings in den Dualitätssatz 2.6 ein. Wir verweisen für all das auf Wirthmüller [53].

Einige einfache Gruppen wollen wir etwas genauer untersuchen.

1.10 Proposition: Seien $V \in \mathcal{U}_f$, $\alpha = [W] - [W'] \in RO(G)$.

$$a) \tilde{\omega}_{\alpha+[V]}^G(S^V) \cong \omega_{\alpha+[V]}^G(S^V, *) \cong \omega_{\alpha}^G(S^0, *) \cong \tilde{\omega}_{\alpha}^G(S^0)$$

b) Falls $|V^G| \geq 1$, so ist der Randoperator

$$\partial: \omega_{\alpha}^G(B_V, S_V) \longrightarrow \tilde{\omega}_{\alpha-1}^G(S_V) \text{ ein Isomorphismus.}$$

$$\text{Beweis: a) } \tilde{\omega}_{\alpha+[V]}^G(S^V) \cong \omega_{\alpha+[V]}^G(S^V, *) \cong$$

$$\cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_f} [S^U \wedge S^W \wedge S^V, S^U \wedge S^{W'} \wedge S^V]_G^* \cong$$

$$\cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_f, U \supset V} [S^U \wedge S^W, S^U \wedge S^{W'}]_G^* \cong$$

$$\cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_f} [S^U \wedge S^W, S^U \wedge S^{W'}]_G^* \cong$$

$$\cong \omega_{\alpha}^G(S^0, *) \cong \tilde{\omega}_{\alpha}^G(S^0).$$

b) Die Behauptung folgt aus der reduzierten exakten Sequenz des G -Paares (B_V, S_V) für die äquivariante Homologietheorie $\omega_{\alpha+*}^G$. Hierfür ist nach Proposition 1.5c) $S_V^G \neq \emptyset$ nötig, was wegen $|V^G| \geq 1$ gegeben ist. ■

1.11 Definition: Sei $V \in \mathcal{U}_f$ und $\partial_1: \omega_{[V]}^G(S^V) \longrightarrow \omega_{[V]-1}^G(S_V)$ der

Randoperator der Mayer-Vietoris-Sequenz der (ausschneidenden) Triade $(S^V; B_V, S^V - B_V)$. Wir betrachten

$$\omega_0^G(P) \cong \tilde{\omega}_0^G(S^0) \cong \tilde{\omega}_{[V]}^G(S^V) \subset \omega_{[V]}^G(S^V) \xrightarrow{\partial_1} \omega_{[V]-1}^G(S_V).$$

Das Bild der 1 in $\omega_0^G(P)$ bezüglich dieser Komposition wird mit Σ_{V-1} bezeichnet. Wegen Proposition 1.5b) liegt Σ_{V-1} in

$\omega_{[V]-1}^G(S_V)$. Es ist auch im Fall $|V^G|=0$ definiert. Falls $|V^G| \geq 1$, so sei $\Delta_V \in \omega_{[V]}^G(B_V, S_V)$ das nach Proposition 1.10b) eindeutig bestimmte Element mit $\partial \Delta_V = \Sigma_{V-1}$.

1.12 Proposition: Seien $V, W \in \mathcal{U}_f$. Dann ist

$$x: \omega_*^G(B_V, S_V) \otimes_R \omega_*^G(S_W) \longrightarrow \omega_*^G(B_V \times S_W, S_V \times S_W)$$

ein Isomorphismus (von R -Bimoduln).

Beweis: Für die Inklusionen

$$i: S_V^+ \xhookrightarrow{G} B_V^+ \quad \text{und} \quad j: (S_V \times S_W)^+ \xhookrightarrow{G} (B_V \times S_W)^+$$

gilt wie im nichtäquvarianten Fall:

$$Ci \stackrel{G}{\cong} S^V \quad \text{und} \quad Cj \stackrel{G}{\cong} S^V \wedge S_W^+.$$

Somit folgt für $\alpha = [X] - [X'] \in RO(G)$:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^G(B_V, S_V) &= \operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{U}_f} [S^Y \wedge S^X, S^Y \wedge S^{X'} \wedge Ci]_G^* \cong \\ &\cong \operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{U}_f} [S^Y \wedge S^X, S^Y \wedge S^{X'} \wedge S^V]_G^* \cong \omega_{\alpha-[V]}^G(P) \\ \omega_\alpha^G(B_V \times S_W, S_V \times S_W) &= \operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{U}_f} [S^Y \wedge S^X, S^Y \wedge S^{X'} \wedge Cj]_G^* \cong \\ &\cong \operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{U}_f} [S^Y \wedge S^X, S^Y \wedge S^{X'} \wedge S^V \wedge S_W^+]_G^* \cong \\ &\cong \omega_{\alpha-[V]}^G(S_W) \end{aligned}$$

Also $\omega_*^G(B_V, S_V) \cong \omega_*^G(P) = R$ und

$$\omega_*^G(B_V \times S_W, S_V \times S_W) \cong \omega_*^G(S_W).$$

Die Behauptung folgt jetzt sofort daraus, daß

$$x: \omega_*^G(B_V, S_V) \otimes_R \omega_*^G(S_W) \longrightarrow \omega_*^G(B_V \times S_W, S_V \times S_W)$$

gerade der Skalarmultiplikation

$$R \otimes_R \omega_*^G(S_W) \longrightarrow \omega_*^G(S_W)$$

entspricht. Letztere ist offenbar ein Isomorphismus. ■

1.13 Proposition: Seien V, W G -Moduln, $|V^G| \geq 1$. Wir betrachten die von Einbettungen induzierten Abbildungen ($S := \text{rd}(B_V \times B_W)$)

$$i_*: \omega_{V+W-1}^G(B_V \times S_W, S_V \times S_W) \longrightarrow \omega_{V+W-1}^G(S, S_V \times B_W),$$

$$j_*: \omega_{V+W-1}^G(S_V \times W) \cong \omega_{V+W-1}^G(S) \longrightarrow \omega_{V+W-1}^G(S, S_V \times B_W)$$

sowie den Randoperator der Triade $(S; B_V \times S_W, S_V \times B_W)$

$$\partial_*: \omega_{V+W-1}^G(S_V \times W) \cong \omega_{V+W-1}^G(S) \longrightarrow \omega_{V+W-2}^G(S_V \times S_W).$$

Dann gibt es $r \in \omega_0^G(P)$ mit:

$$i) \quad r \cdot j_*(\Sigma_{V+W-1}) = i_*(\Delta_V \times \Sigma_{W-1})$$

$$ii) \quad r \cdot \partial_*(\Sigma_{V+W-1}) = \Sigma_{V-1} \times \Sigma_{W-1}. \quad r \text{ ist Einheit, wenn } |W^G| \geq 1.$$

Beweis: Der Beweis ist eine direkte Übertragung des Beweises von Proposition A.1.2i), ii); man beachte dabei, daß $S_V \times B_W$ und $S_V \times W$ punktiert sind. Zum Beweis von "r Einheit" benötigt man, daß $\omega_*^G(S_W)$ freier R -Modul und Σ_{V-1} Erzeugendes ist. Dies ist der Fall, wenn $|W^G| \geq 1$, etwa $W \cong R \times W_0$:

$$\omega_*^G(S_W) \cong \omega_*^G(S^{W_0}) \cong \omega_*^G(S^{W_0}) \otimes \omega_*^G(P) \cong R \otimes R. \quad \blacksquare$$

Nun wollen wir den Ring $\omega_0^G(P)$ etwas genauer studieren. Dazu benötigen wir für $H < G$ die Abbildung

$$\varphi_H: \omega_0^G(P) \cong \text{colim}_{V \in \mathcal{U}_f} [S^V, S^V]_G^* \longrightarrow \mathbb{Z}, [f] \mapsto \deg f^H.$$

Hier ist $f: S^V \xrightarrow{G} S^V$, also $f^H: S^{V^H} \rightarrow S^{V^H}$ wieder eine Abbildung zwischen Sphären $S^{V^H} := (S^V)^H = S^{(V^H)}$, wobei ohne Einschränkungen V so groß sei, daß $|V^H| \geq 2$. Ist $g: S^W \xrightarrow{G} S^W$ ein anderer Repräsentant von $[f]$, das heißt $[f] = [g] \in \omega_0^G(P)$, so gibt es G -Moduln X, Y mit $S^X f \cong S^Y g$. Daraus folgt aber

$$S^{X^H} f^H = (S^X f)^H = (S^Y g)^H = S^{Y^H} g^H.$$

Da der Abbildungsgrad unabhängig von Homotopie und Einhängungen ist, ist φ_H wohldefiniert.

1.14 Satz: Die Abbildung

$$\varphi := (\varphi_H)_{H < G, |WH| < \infty}: \omega_0^G(P) \longrightarrow \prod_{H < G, |WH| < \infty} \mathbb{Z}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

Beweis: Hauschild [19], Satz 4.5c) ■

1.15 Bemerkung: a) $\omega_0^G(P)$ ist isomorph zum Burnsidering $\Lambda(G)$;

siehe tom Dieck [13], Theorem 8.5.1. Für endliche Gruppen G gibt es einen G -Modul V , so daß $\omega_0^G(P) \cong [S^V, S^V]_G^*$.

Ist $\{V_1, \dots, V_n\}$ eine vollständige Menge paarweise nicht isomorpher G -Moduln, so ist $V := \prod_{i=1}^n (V_i \times V_i)$ groß genug.

Man hat dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [S^V, S^V]_G^* & \xrightarrow{\cong} & \Lambda(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{H < G} [S^{V^H}, S^{V^H}] & \longrightarrow & \prod_{H < G} \mathbb{Z} \end{array}$$

Dies wurde zuerst von Segal [45] gesehen. Ein ausführlicher Beweis ist in Rubinsztein [43], Theorem 10.1, zu finden.

b) Falls G ein Torus ist, so ist die einzige abgeschlossene Untergruppe H von G mit $|WH| < \infty$ die ganze Gruppe G . Somit ist $\varphi = \varphi_G: \omega_0^G(P) \longrightarrow \mathbb{Z}$ injektiv.

Zum Abschluß dieses Paragraphen konstruieren wir den äquivarianten J -Homomorphismus wie in Anhang 2 den gewöhnlichen.

1.16 Definition: Für einen G -Modul W sei

$$GL(W) := \{A: W \rightarrow W \text{ linearer Isomorphismus}\}$$

mit dem Basispunkt Id und der G -Operation

$$(gA) \cdot w := g \cdot (A \cdot (g^{-1}w)) \quad \text{für } g \in G, A \in GL(W), w \in W.$$

$gA \in GL(W)$, da G linear auf W operiert.

$$(gh)A = g(hA), eA = A \text{ und } g\text{Id} = \text{Id} \text{ ist klar.}$$

1.17 Proposition: $(GL(W))^G = \{A \in GL(W): gA = A\} =$
 $= \{A \in GL(W): A \text{ ist äquivariant}\}$

Beweis: Seien $A \in GL(W)^G$, $w \in W$, $g \in G$. Dann

$$A \cdot gw = gg^{-1} \cdot (A \cdot gw) = g \cdot ((g^{-1}A) \cdot w) = g \cdot (Aw).$$

Ist umgekehrt $A \in GL(W)$ äquivariant, $g \in G$, $w \in W$, so gilt

$$(gA)w = g \cdot (A \cdot g^{-1}w) = gg^{-1} \cdot (Aw) = Aw,$$

also $gA = A$. ■

1.18 Konstruktion von J_G : Gegeben seien G -Moduln V, W sowie

$f: S_V \xrightarrow{G} GL(W)$. f induziert eine stetige Abbildung

$$F: S_V \times S_W \longrightarrow W - \{0\}, F(v, w) := f(v) \cdot w.$$

F ist äquivariant, denn für $g \in G$, $v \in S_V$, $w \in S_W$ gilt:

$$\begin{aligned} F(g \cdot (v, w)) &= F(gv, gw) = f(gv) \cdot gw = (g \cdot f(v)) \cdot gw = \\ &= g \cdot (f(v) \cdot (g^{-1}gw)) = g \cdot (f(v) \cdot w) = g \cdot F(v, w) \end{aligned}$$

F induziert vermöge der Hopf-Konstruktion eine stetige Ab-

bildung $\Gamma F: S_V * S_W = B_V \times_{S_W} S_V \times B_W \longrightarrow S^W$

$$\Gamma F(v, w) := \begin{cases} 0 & v=0 \\ \|v\| \cdot F(v/\|v\|, w) & v \in B_V - \{0\}, w \in S_W \\ \|w\|^{-1} \cdot F(v, w/\|w\|) & v \in S_V, w \in B_W - \{0\} \\ \infty & w=0 \end{cases}$$

ΓF ist äquivariant, da G orthogonal operiert und F äquivariant ist. ΓF bildet die Triade $(S_V * S_W; B_V \times S_W, S_V \times B_W)$ ab in die Triade $(S_V^V; B_V, S_V^V - \tilde{B}_V)$. Offensichtlich ist

$$\varphi: S_V * S_W \longrightarrow S_{V \times W}, \quad \varphi(v, w) := \frac{(v, w)}{\| (v, w) \|},$$

ein G -Homomorphismus. Betrachten wir nun

$$(\Gamma F \circ \varphi^{-1})_*: \tilde{\omega}_{V+W-1}^G(S_{V \times W}) \longrightarrow \tilde{\omega}_{V+W-1}^G(S^W),$$

so sei $J_G(f) := (\Gamma F \circ \varphi^{-1})_*(\Sigma_{V+W-1})$.

Nun gilt wie üblich für $f_0, f_1: S_V \xrightarrow{G} GL(W)$:

$$f_0 \stackrel{G}{\simeq} f_1 \Rightarrow F_0 \stackrel{G}{\simeq} F_1 \Rightarrow \Gamma F_0 \stackrel{G}{\simeq} \Gamma F_1 \Rightarrow J_G(f_0) = J_G(f_1).$$

Hier ist $F_i(v, w) := f_i(v) \cdot w$, $i=0,1$.

Somit erhalten wir eine Abbildung

$$J_G: [S_V, GL(W)]_G \longrightarrow \tilde{\omega}_{V+W-1}^G(S^W).$$

Ist $|V^G| \geq 1$, etwa $V \cong \mathbb{R} \times U$, $\infty \hat{=} (1, 0) \in S_V^G \subset S_V \cong S^U$ Basispunkt, so erhalten wir auch

$$J_G: \pi_U^G(GL(W)) \cong [S_V, GL(W)]_G^* \longrightarrow \tilde{\omega}_{V+W-1}^G(S^W) \cong \tilde{\omega}_{U+W}^G(S^W). \quad \blacksquare$$

1.19 Bemerkung: a) Ist $|V^G| \geq 2$, so ist $[S_V, GL(W)]_G^*$ eine Gruppe.

Wie in Whitehead [49], S. 636, bestätigt man, daß J_G ein Gruppenhomomorphismus ist.

b) Ist $V = \mathbb{R}^{k+1}$ trivialer G -Modul, $S_V \xrightarrow{G} S^k$, so ist

$$[S_V, GL(W)]_G^* = [S^k, GL(W)^G]^* = \pi_k(GL(W)^G).$$

Abbildungen A in $GL(W)^G$ sind nach Proposition 1.17 äquivariant, induzieren also für alle $H < G$ Einschränkungen $A^H: W^H \longrightarrow W^H$. Diese A^H sind natürlich wieder Isomorphismen, $A^H \in GL(W^H)$. Wir erhalten somit für $H < G$ eine Abbildung $(n^H := |W^H|)$

$$E^H: GL(W)^G \longrightarrow GL(n^H).$$

Es ist klar, daß E^H punktiert ist. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_k(\mathrm{GL}(W)^G) & \xrightarrow{J_G} & \tilde{\omega}_{k+W}^G(S^W) \\
 \downarrow E_*^H & & \downarrow R^H \\
 \pi_k(\mathrm{GL}(n^H)) & \xrightarrow{J} & \tilde{\omega}_{k+(n^H)}(S^{n^H})
 \end{array}$$

kommutiert, wobei

$$\begin{aligned}
 R^H: \tilde{\omega}_{k+W}^G(S^W) &\cong \operatorname{colim}_{X \in \mathcal{U}_f} [S^X \wedge S^k \wedge S^W, S^X \wedge S^W]_G^* \longrightarrow \\
 &\longrightarrow \operatorname{colim}_{r \rightarrow \infty} [S^r \wedge S^k \wedge S^{n^H}, S^r \wedge S^{n^H}]^* \cong \tilde{\omega}_{k+(n^H)}(S^{n^H})
 \end{aligned}$$

ebenfalls von der Einschränkung induziert ist: $[f] \mapsto [f^H]$.

Daß obiges Diagramm kommutativ ist, sieht man leicht:

Sei $f: S^k \longrightarrow \mathrm{GL}(W)^G$. f induziert $F: S^k \times_{S^W} \xrightarrow{G} W - \{0\}$ und somit $\Gamma F: S^k *_{S^W} \xrightarrow{G} S^W$. ΓF repräsentiert $J_G([f])$ (bis auf den Homomorphismus $S_{k+W+1} \xrightarrow{G} S^k *_{S^W}$).

$R^H J_G([f])$ wird also repräsentiert von

$$(\Gamma F)^H = \Gamma F^H: S^k * S^{n^H-1} \cong S^k *_{S^W} S^H = (S^k *_{S^W})^H \longrightarrow S^{W^H} \cong S^{n^H}.$$

Andererseits induziert

$$E^H \circ f: S^k \longrightarrow \mathrm{GL}(n^H)$$

$$F^H: S^k \times S^{n^H-1} \cong S^k \times_{S^W} S^H \longrightarrow W^H - \{0\} \cong \mathbb{R}^{n^H} - \{0\}.$$

Also wird auch $J \circ E_*^H([f]) = J([E^H \circ f])$ repräsentiert von $(\Gamma F)^H = \Gamma F^H$.

- c) Die hier gegebene Definition von J_G ist im wesentlichen die direkte Übertragung der ursprünglichen Definition des nichtäquivalenten J -Homomorphismus von G. W. Whitehead in [49] (siehe auch Anhang 2 zur Information über diesen). Kern und Bild des stabilen J -Homomorphismus $J: \pi_k(0) \longrightarrow \pi_k^S$ wurden hauptsächlich von Adams [1] be-

rechnet (siehe Satz A.2.4). Das große Interesse, mit dem die algebraischen Topologen den J -Homomorphismus studierten, hat sich auch auf J_G übertragen. So wurde J_G schon bei der erstmaligen Definition der äquivarianten stabilen Kohomotopietheorie von Segal [45] eingeführt, allerdings formuliert mit Hilfe von KO_G , der äquivarianten K -Theorie. Überhaupt wurden auch andere mögliche Definitionen von J auf die äquivariante Situation übertragen. Eigenartigerweise haben wir die hier gegebene Übertragung der ursprünglichen Definition nicht gefunden. Im Gegensatz zu J ist J_G aber längst noch nicht endgültig erforscht. Die allgemeinsten Resultate über J_G für endliches G findet man in der Arbeit von McClure [39]. Der spezielle Fall $G=\mathbb{Z}_2$ ist schon länger Gegenstand ausführlicher Forschungen; siehe etwa Löffler [36] oder Minami [40]. Ein weiterer Spezialfall ist $G=S^1$, der in [23] von Husseini bearbeitet wurde. Noch nicht veröffentlicht ist das Paper [24] - gleichfalls von Husseini - über J_G für $G = (S^1)^n$ ein Torus.

Es ist hier nicht der Platz, die verschiedenen Ergebnisse zusammenzustellen, vor allem da jeder Autor mit einer anderen Definition von J_G arbeitet. Diese Definitionen sind natürlich alle miteinander verwandt, aber nicht immer äquivalent. Es sollte hier nur auf weiterführende Arbeiten über J_G hingewiesen werden.

§ 2. Äquivariante Čech-Erweiterungen

In diesem Paragraphen wollen wir zu ω_G^* eine Čech-Kohomologietheorie konstruieren und deren für uns wichtige Eigenschaften herleiten. Große Teile der Konstruktion und der Beweise verlaufen völlig parallel zur nichtäquivalenten Situation, die in Dold [15], VIII.6 und Appendix, ausführlich beschrieben wird. Wir werden deshalb nur die notwendigen Modifikationen durchführen und ansonsten auf die entsprechenden Passagen in Dolds Buch verweisen.

Da in unseren Anwendungen nur G -Teilmengen von $S^W = WU(\infty) - W$ ist ein fester G -Modul - vorkommen, beschränken wir uns auf diese Situation. Die Konstruktion kann für lokalkompakte G -Teilmengen eines G -euklidischen Umgebungsretrakts (G -EUR) E durchgeführt werden. Dabei heißt E G -EUR, wenn E G -homöomorph ist zu einem G -Retrakt einer offenen G -Teilmenge eines G -Moduls. Das ist für S^W natürlich der Fall:

$$S^W \overset{G}{\cong} S_{W \times \mathbb{R}} \text{ und } S_{W \times \mathbb{R}} \text{ ist } G\text{-Retrakt von } W \times \mathbb{R} - \{0\}.$$

Wir benötigen die folgende äquivariante Fassung des Satzes von Tietze.

2.1 Satz (Tietze-Gleason): G operiere auf dem normalen Raum X , $A \overset{G}{\hookrightarrow} X$ sei abgeschlossen. Ist V ein G -Modul und $\varphi: A \xrightarrow{G} V$ G -Abbildung, dann existiert eine äquivariante Erweiterung $\psi: X \xrightarrow{G} V$ von φ .

Beweis: Bredon [10], Theorem I.2.3 ■

Wenn nicht anders erwähnt, bestehen bis einschließlich Satz 2.10 alle Raumpaare (X, A) , (Y, B) aus lokalkompakten G -Teilmengen von S^W .

2.2 Definition: Seien $A \subseteq X \subseteq S^N$ lokalkompakt. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_G(X, A)$ sei die Menge aller Paare (U_1, U_2) von G -Umgebungen U_i von X , U_i von A mit $U_1 \supset U_2$. $\mathcal{T}$ ist gerichtet durch umgekehrte Inklusion, das heißt $(U_1, U_2) \leq (U'_1, U'_2) \iff U_1 \supset U'_1, U_2 \supset U'_2$. Die $\omega_G^*(U_1, U_2)$ bilden zusammen mit den von Inklusionen induzierten Homomorphismen $\omega_G^*(U_1, U_2) \rightarrow \omega_G^*(U'_1, U'_2)$ ein direktes System abelscher Gruppen. Wir definieren

$$\bar{\omega}_G^*(X, A) := \operatorname{colim}_{(U_1, U_2) \in \mathcal{T}} \omega_G^*(U_1, U_2).$$

Dimensionsweise gilt natürlich

$$\bar{\omega}_G^{\alpha}(X, A) = \operatorname{colim}_{\mathcal{T}} \omega_G^{\alpha}(U_1, U_2), \quad \alpha \in \mathbb{R} \cap (0, \infty).$$

$\bar{\omega}_G^*$ heißt äquivalente Dech-stabile Kohomotopietheorie.

Die Definition ist analog zu Dold loc. cit. VIII.6. Wir behalten uns die Schreibweise $\bar{\omega}_G^*$ für eine Definition mit Hilfe von Nerven von Überdeckungen vor (siehe Definition 2.24), die wir allerdings nur für endliche Gruppen G durchführen können.

2.3 Definition: Sei $f: (X, A) \xrightarrow{G} (Y, B)$. Dann gibt es eine offene G -Umgebung O von X in S^N , so daß X abgeschlossen in O ist.

Man wähle dafür zuerst eine eventuell nicht invariante offene Umgebung O' von X in S^N mit X abgeschlossen in O' (Dold loc. cit. IV.8.3) und setze $O := G \cdot O'$. O ist offene G -Umgebung von X mit $\bar{X} \cap O = G \cdot (\bar{X} \cap O') = G \cdot X = X$.

Nach Satz 2.1 von Vietre-Gleason besitzt

$$i \circ f: X \xrightarrow{G} Y \subseteq S^N \xrightarrow{G} S_{W \times R} \xrightarrow{G} W \times R$$

eine äquivalente Erweiterung $\phi: O \xrightarrow{G} W \times R$. Dann ist $\phi^{-1}(W \times R - \{0\})$ eine offene G -Umgebung von X in S^N , und die Abbildung

$$F: \phi^{-1}(W \times R - \{0\}) \xrightarrow{\phi} W \times R - \{0\} \xrightarrow{G} S_{W \times R} \subseteq S^N$$

ist eine äquivalente Erweiterung von f .

Sind nun $U_2 \overset{G}{\subset} U_1$ G -Umgebungen von $B \overset{G}{\subset} Y$ in S^W , so sind $F^{-1}U_2 \overset{G}{\subset} F^{-1}U_1$ G -Umgebungen von $A \overset{G}{\subset} X$. Sei

$$\varphi_{U_1, U_2}: \omega_G^*(U_1, U_2) \xrightarrow{F^*} \omega_G^*(F^{-1}U_1, F^{-1}U_2) \xrightarrow{c} \bar{\omega}_G^*(X, A),$$

wobei c die kanonische Abbildung in den Kolimes ist.

Man sieht leicht, daß diese Homomorphismen φ_{U_1, U_2} einen Homomorphismus

$$\varphi: \bar{\omega}_G^*(Y, B) \longrightarrow \bar{\omega}_G^*(X, A)$$

induzieren, und zeigt wie in Dold loc. cit. VIII.6.3, daß φ unabhängig von der Wahl von $\dagger$ ist (man benötigt nur den Satz von Tietze-Gleason). Jetzt können wir definieren:

$$f^* := \bar{\omega}_G^*(f) := \varphi: \bar{\omega}_G^*(Y, B) \longrightarrow \bar{\omega}_G^*(X, A). \quad \blacksquare$$

2.4 Proposition: a) $\bar{\omega}_G^*$ ist ein kontravarianter Funktor, definiert auf der Kategorie der lokalkompakten Paare in S^W in die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen.

$$b) f \overset{G}{\simeq} g: (X, A) \xrightarrow{G} (Y, B) \Rightarrow f^* = g^*: \bar{\omega}_G^*(Y, B) \longrightarrow \bar{\omega}_G^*(X, A)$$

Beweis: Dold loc. cit. VIII.6.6, 6.7 ■

Die Konstruktion von Verbindungshomomorphismen

$$\delta: \bar{\omega}_G^\alpha(A) \longrightarrow \bar{\omega}_G^{\alpha+1}(X, A), \quad \alpha \in RO(G),$$

sowie der Nachweis, daß damit $\bar{\omega}_G^{\alpha+*}$ die Eigenschaften einer äquivarianten Kohomologietheorie erfüllt (allerdings nur auf einer Unterkategorie von $GTOP^2$ definiert), benötigen wir nicht. Wir verweisen dafür nur auf Dold loc. cit., dessen Beweise sich übertragen lassen. Explizit festhalten werden wir nur die Stetigkeit von $\bar{\omega}_G^*$.

2.5 Proposition: Sei $\mathcal{D}$ ein direktes System kompakter G -Paare (K, L) in S^W , gerichtet durch umgekehrte Inklusion. Wir set-

zen: $(X, A) := \bigcap_{\mathfrak{g}} (K, L)$. Dann bilden die abelschen Gruppen $\bar{\omega}_G^*(K, L)$, $(K, L) \in \mathfrak{g}$, und die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\bar{\omega}_G^*(K, L) \longrightarrow \bar{\omega}_G^*(K', L'), \quad (K, L) \leq (K', L')$$

ein direktes System abelscher Gruppen, und es gilt:

Die von den Einbettungen $(X, A) \xrightarrow{G} (K, L)$ induzierte Abbildung

$$\operatorname{colim}_{\mathfrak{g}} \bar{\omega}_G^*(K, L) \longrightarrow \bar{\omega}_G^*(X, A)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Dold loc. cit. VIII.6.19 ■

Auch die Poincaré-Lefschetz-Dualität gilt in der äquivarianten Situation.

2.6 Satz: Sei (X, A) ein kompaktes G -Paar in S^W . Dann gibt es für alle $\alpha \in R_0(G)$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\omega_{\alpha}^G(S^W - A, S^W - X) \cong \bar{\omega}_G^{[W]}(-\alpha)(X, A).$$

Beweis: Wirthmüller [53], Theorem 4.1; vergleiche auch Lewis/May/Steinberger [35], §§ III.4, III.5. ■

Mit Hilfe dieser Dualität übertragen wir die Stetigkeit von $\bar{\omega}_G^*$ auf ω_*^G .

2.7 Satz: Sei $\mathfrak{g}$ ein direktes System offener G -Paare (O, Q) in S^W , gerichtet durch Inklusion; $(X, A) := \bigcup_{\mathfrak{g}} (O, Q)$. Dann bilden die abelschen Gruppen $\omega_*^G(O, Q)$, $(O, Q) \in \mathfrak{g}$, und die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\omega_*^G(O, Q) \longrightarrow \omega_*^G(O', Q'), \quad (O, Q) \leq (O', Q'),$$

ein direktes System abelscher Gruppen, und es gilt:

Die von den Einbettungen $(0, Q) \xrightarrow{G} (X, A)$ induzierte Abbildung

$$\operatorname{colim}_G \omega_*^G(0, Q) \longrightarrow \omega_*^G(X, A)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Mit der Dualität 2.6 entspricht die Behauptung gerade der Stetigkeit von $\bar{\omega}_G^*$. ■

Damit haben wir fast alle für uns wichtigen Eigenschaften von Čech-Kohomologien auf den äquivarianten Fall übertragen. Es fehlt nur noch eine Satz A.1.6 entsprechende Aussage; jener Satz besagt, daß für eine (nichtäquivariante) Kohomologietheorie $h^* \check{h}^n(X) \cong \{0\}$ falls $n > \dim X$ - vorausgesetzt h^* erfüllt diese Aussage für den einpunktigen Raum P , das heißt $h^n(P) \cong \{0\}$ falls $n > 0$ (h^* zusammenhängend). Kernstück des Beweises von Satz A.1.6 ist, daß $\check{h}^*(X)$ definiert ist als $\operatorname{colim} h^*(N\mathcal{U})$, wobei $\mathcal{U}$ die gerichtete Menge der offenen Überdeckungen von X durchläuft und $N\mathcal{U}$ der Nerv von $\mathcal{U}$ ist. $N\mathcal{U}$ ist ein simplizialer Komplex, und die Menge der $\mathcal{U}$ mit $\dim N\mathcal{U} \leq \dim X$ ist kofinal. Nun bleibt nur noch zu zeigen, daß $h^n(N\mathcal{U}) \cong \{0\}$ für $n > \dim X \geq \dim N\mathcal{U}$, was aus dem Zusammenhang von h^* folgt.

Wir versuchen nun, diesen Sachverhalt auf $\bar{\omega}_G^*$ zu übertragen.

2.8 Definition: Sei $\alpha = [V] - [V'] \in RO(G)$. Die Fixpunktdimension von α ist definiert durch:

$$FPdim \alpha := \min\{|V^H| - |V'^H|; H < G\} \in \mathbb{Z}$$

Es ist klar, daß diese Zahl unabhängig von der Wahl von V und V' ist, und daß gilt:

$$-|V'| \leq FPdim \alpha \leq |V|,$$

$$V' \cong \{0\} \Rightarrow FPdim \alpha = |V^G|.$$

2.9 Vermutung: Sei $X \in S^W$ abgeschlossen, also kompakt. Dann gilt für alle $\alpha \in RO(G)$ mit $FPdim \alpha > \dim X/G$: $\bar{\omega}_G^\alpha(X) \approx \{0\}$.

Ein Beweis dieser Vermutung könnte wie folgt geführt werden.

1. Definiere, was ein äquivarianter simplizialer Komplex ist, was eine äquivalente Überdeckung $\mathcal{U}$ ist und was der Nerv $N\mathcal{U}$ von $\mathcal{U}$ ist; $N\mathcal{U}$ sollte natürlich ein äquivarianter simplizialer Komplex sein.
2. Zeige für $X \in S^W$ kompakt: $\bar{\omega}_G^*(X) \approx \operatorname{colim} \omega_G^*(N\mathcal{U})$, wobei $\mathcal{U}$ die (gerichtete Menge der) äquivalenten Überdeckungen von X durchläuft - oder eine Teilmenge davon.
3. Zeige, daß die Menge der $\mathcal{U}$ mit $\dim(N\mathcal{U})/G \leq \dim X/G$ kofinal ist.
4. Zeige für (endliche) äquivalente simpliziale Komplexe K und $\alpha \in RO(G)$:

$$FPdim \alpha > \dim K/G \Rightarrow \omega_G^\alpha(K) \approx \{0\}.$$

Wir können diesen Beweis nur für endliches G führen, werden aber immer darauf hinweisen, wenn Teilaussagen in allgemeinerer Form gelten. Ziel für den Rest des Paragraphen ist also der Beweis von

2.10 Satz: Für eine endliche Gruppe G ist Vermutung 2.9 richtig, das heißt $\bar{\omega}_G^\alpha(X) \approx \{0\}$ falls $\alpha \in RO(G)$, $X \in S^W$ kompakt mit $FPdim \alpha > \dim X/G$.

Der Beweis von Satz 2.10 besteht aus obigen vier Schritten.

Die folgenden Definitionen und Bemerkungen sind im wesentlichen von Bredon [10], III.1, III.6, und werden der besseren Lesbarkeit

wegen in modifizierter Form hier zusammengestellt. Von jetzt an bis zum Ende des Paragraphen sei G eine endliche Gruppe.

2.11 Definition: a) Ein (geometrischer) simplizialer Komplex K heißt G -simplizialer Komplex oder kurz G -Komplex, falls gilt:

i) G operiert simplizial auf K , das heißt Multiplikation mit $g \in G$ induziert eine (bijektive) simpliziale Abbildung $\hat{g}: K \rightarrow K$.

ii) Seien $H \leq G$, $h_0, \dots, h_n \in H$, $v_0, \dots, v_n$ Ecken von K , die in einem Simplex liegen (die h_i , v_i sind nicht notwendig paarweise verschieden). Liegen $h_0 v_0, \dots, h_n v_n$ ebenfalls in einem Simplex von K , so gibt es ein $h \in H$ mit $h v_i = h_i v_i$, $i=0, \dots, n$.

b) Ein G -Raum P heißt G -Polyeder, falls P G -homöomorph zu einem G -Komplex K ist. K heißt dann G -Triangulierung von P . Begriffe wie endliches, endlich-dimensionales G -Polyeder übertragen sich natürlich.

2.12 Bemerkungen: a) Bredon loc. cit. verlangt nur Bedingung i) aus Definition 2.11a) und nennt unsere G -Komplexe regulär. Man sieht leicht, daß die baryzentrische Unterteilung eines G -Komplexes wieder ein G -Komplex ist. Die zweite baryzentrische Unterteilung eines G -Komplexes im Sinne von Bredon ist regulär, das heißt ein G -Komplex in unserem Sinne. Die Klasse der G -Polyeder ist also in beiden Fällen gleich. (Bredon [10], Proposition III.1.1)

b) Aus ii) folgt leicht, daß für jedes $g \in G$ und jede Ecke v von K gilt:

Liegen v und gv in einem Simplex, so ist $v=gv$.

- c) Für ein G -Polyeder P ist P/G ein Polyeder, das heißt ein triangulierbarer Raum. Ist nämlich K eine G -Triangulierung von P , so ist K/G ein simplizialer Komplex, der homöomorph zu P/G , also eine Triangulierung von P ist; und die Projektion $p: K \rightarrow K/G$ induziert für jedes Simplex s von K einen linearen Isomorphismus $s \rightarrow p(s)$. (Bredon [10], S. 117)
- d) Die Standgruppe eines Elements $x \in K$, K ein G -Komplex, ist $G_x = \bigcap_{i=0}^n G_{v_i}$, wenn x im offenen Simplex mit den Ecken $v_0, \dots, v_n$ liegt (wegen b)). Insbesondere ist die Standgruppe konstant in offenen Simplizes.
- e) Es gibt auch Definitionen von G -simplizialen Komplexen (und G -CW-Komplexen) für beliebige kompakte Lie-Gruppen G , siehe Illman [27], Matumoto [38] oder Waner [47].

2.13 Proposition: Sei X ein parakompakter und lokalkompakter G -Raum, zum Beispiel ein endliches G -Polyeder. Dann gilt für $\alpha \in RO(G)$:

$$FPdim \alpha > \dim X/G = \dim X \Rightarrow \omega_G^\alpha(X) \cong \{0\}.$$

Beweis: Kosniowski [31], Corollary 2.13. Dort wird sogar gezeigt: $[\forall H < G: |\alpha^H| > \dim X^H] \Rightarrow \omega_G^\alpha(X) \cong \{0\}$, wobei $|\alpha^H| := |V^H| - |V'^H|$, falls $\alpha = [V] - [V']$. ■

Proposition 2.13 entspricht dem vierten Schritt von Seite 88.

2.14 Bemerkung: Man kann auch für beliebige kompakte Lie-Gruppen G und endlich-dimensionale G -CW-Räume X zeigen:

$$\alpha \in RO(G), FPdim \alpha > \dim X/G \Rightarrow \omega_G^\alpha(X) \cong \{0\}.$$

Wir skizzieren den Beweis nur und setzen den Begriff des G -CW-Komplexes voraus (siehe Waner [47]).

1. Schritt: Man zeigt die Behauptung zuerst für Orbits G/H ,
das heißt $\omega_G^\alpha(G/H) \cong \{0\}$, falls $\text{FPdim } \alpha > 0$.

Es gilt nämlich ($\alpha = [V] - [V']$, W G -Modul)

$$[S^W \wedge S^{V'} \wedge (G/H)^+, S^W \wedge S^V]_G^* \cong [S^W \wedge S^{V'}, S^W \wedge S^V]_H^* \cong \{0\}.$$

a) Die erste Isomorphie kommt von den Zuordnungen

$$[\varphi: \Lambda \wedge (G/H)^+ \xrightarrow{G} B] \mapsto [\tilde{\varphi}: A \xrightarrow{H} B, \tilde{\varphi}(a) := \varphi(a \wedge eH)]$$

$$[\psi: A \xrightarrow{H} B] \mapsto [\hat{\psi}: \Lambda \wedge (G/H)^+ \xrightarrow{G} B, \hat{\psi}(a \wedge gH) := g\psi(g^{-1}a)]$$

Die Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$ bestätigt man leicht.

Zur Äquivarianz: Seien $a \in A$, $h \in H$.

$$\tilde{\varphi}(ha) = \varphi(ha \wedge eH) = \varphi(ha \wedge hH) = \varphi(h \cdot (a \wedge eH))$$

$$= h \cdot \varphi(a \wedge eH) = h \cdot \tilde{\varphi}(a).$$

$\hat{\psi}$ ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl von g , da $gh\psi((gh)^{-1}a) = g\psi(g^{-1}a)$ für $h \in H$, $g \in G$, $a \in A$.

$\hat{\psi}$ ist stetig, wenn A kompakt erzeugter punktierter G -Raum ist: Dann ist nämlich

$$A \times G \rightarrow \Lambda \wedge (G/H)^+, (a, g) \mapsto a \wedge gH,$$

identifizierend. $\hat{\psi}$ ist äquivariant: Seien $a \in A$, $g, g' \in G$.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(g' \cdot (a \wedge gH)) &= \hat{\psi}(g' a \wedge g' gH) = g' g \psi((g' g)^{-1} g' a) = \\ &= g' g \psi(g^{-1} a) = g' \hat{\psi}(a \wedge gH). \end{aligned}$$

Dahinter steckt ein Paar adjungierter Funktoren: Es

$$\text{ist} \quad \Lambda \wedge (G/H)^+ \xrightarrow{G} G^+ \wedge_H A := (G^+ \wedge A)/H,$$

falls A ein kompakt erzeugter punktierter G -Raum ist;

hier ist $G^+ \wedge A$ rechter H -Raum bezüglich der Operation

$$(g \wedge a) \cdot h := (gh) \wedge (h^{-1}a) \text{ und linker } G\text{-Raum bezüglich}$$

$$g' \cdot (g \wedge a) := (g'g) \cdot a. \text{ Somit ist } G^+ \wedge_H A \text{ (linker) } G\text{-Raum.}$$

$\wedge_H$ ist das punktierte Analogon zu $\times_H$, das in 1.1e) definiert wurde.

Die obige G -Homöomorphie ist gegeben durch

$$\Lambda \wedge (G/H)^+ \ni a \wedge gH \mapsto g \wedge_H g^{-1}a \in G^+ \wedge_H \Lambda.$$

Umkehrabbildung ist

$$G^+ \wedge_H \Lambda \ni g \wedge_H a \mapsto g a \wedge gH \in \Lambda \wedge (G/H)^+.$$

Man beachte, daß G diagonal auf $\Lambda \wedge (G/H)^+$ operiert, auf $G^+ \wedge_H \Lambda$ hingegen nur über die G^+ -Komponente.

Nun überlegt man sich nur noch, daß

$$G^+ \wedge \cdot : \mathbf{HkTOS}^* \longrightarrow \mathbf{GkTOS}^*$$

linksadjungiert ist zum Vergißfunktork

$$\gamma_H : \mathbf{GkTOS}^* \longrightarrow \mathbf{HkTOS}^*,$$

wobei das k für kompakt erzeugt steht, also $\mathbf{GkTOS}^*$ die Kategorie der kompakt erzeugten G -Räume bedeutet. Die Adjunktion ist gegeben durch die Zuordnungen

$$\begin{aligned} [\varphi : G^+ \wedge_H \Lambda \xrightarrow{G} B] &\mapsto [\tilde{\varphi} : A \xrightarrow{H} \gamma_H B, \tilde{\varphi}(a) := \varphi(e \wedge_H a)] \\ [\psi : A \xrightarrow{H} B] &\mapsto [\hat{\psi} : G^+ \wedge_H \Lambda \xrightarrow{G} B, \hat{\psi}(g \wedge_H a) := g \cdot \psi(a)]. \end{aligned}$$

b) Die zweite Isomorphie

$$[S^W \wedge S^{V'}, S^W \wedge S^V]_H^* \cong \{0\}, \text{ falls } \text{FPdim } \alpha > 0,$$

wird mit Hilfe der gewöhnlichen Hindernistheorie bewiesen (vergleiche Adams [2], Proposition 2.4).

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \omega_G^{\alpha}(G/H) &\cong \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{U}_f} [S^W \wedge S^{V'} \wedge (G/H)^+, S^W \wedge S^V]_G^* \\ &\cong \operatorname{colim}_{W \in \mathcal{U}_f} [S^W \wedge S^{V'}, S^W \wedge S^V]_H^* \cong \{0\}, \end{aligned}$$

falls $\text{FPdim } \alpha > 0$.

2. Schritt: Die Behauptung für beliebige G -CW-Komplexe X statt G/H folgt nun wie im Beweis von Satz A.1.6. Man muß dabei allerdings die äquivariante Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz benutzen,

$$E_2^{p,q} \cong H_G^p(X; \omega_{-G}^{\alpha+q}) \Rightarrow \omega_G^{\alpha+*}(X).$$

Hier ist H_G^p Bredon-Kohomologie mit Koeffizientensystem ω_G^{a+q} . Wir haben keine Konvergenzprobleme, da $\dim X/G < \infty$. Eine ausführliche Beschreibung würde zu weit führen; wir verweisen daher nur auf Illman [25] und [26] sowie Willson [51]. ■

Sei weiterhin G endlich. Wir fahren fort mit der Entwicklung der im ersten Schritt von S. 88 genannten Begriffe.

2.15 Definition: Sei X ein G -Raum. Eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X heißt G -Überdeckung, wenn gilt:

i) $\forall g \in G: \forall U \in \mathcal{U}: g \cdot U \in \mathcal{U}$

ii) Für $H < G$, $h_0, \dots, h_n \in H$, $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\bigcap_{i=0}^n U_i \neq \emptyset \neq \bigcap_{i=0}^n h_i U_i \Rightarrow \exists h \in H: \forall i=0, \dots, n: h U_i = h_i U_i.$$

2.16 Bemerkung: a) Aus Bedingung ii) folgt sofort, daß für $g \in G$, $U \in \mathcal{U}$ gilt: $U \cap gU \neq \emptyset \Rightarrow U = gU$.

b) Ist $\mathcal{U}$ G -Überdeckung eines G -Raumes X , so sei $N\mathcal{U}$ der Nerv von $\mathcal{U}$, ein simplizialer Komplex. $N\mathcal{U}$ ist in kanonischer Weise ein G -Komplex, denn G operiert durch Bijektionen auf $\mathcal{U} = (N\mathcal{U})^0$, dem 0-Gerüst von $N\mathcal{U}$. Die Operation von G auf $N\mathcal{U}$ sei davon induziert, ist also automatisch simplizial. Die Bedingungen ii) der Definitionen 2.11a) und 2.15 entsprechen sich gerade.

c) Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ zwei G -Überdeckungen eines G -Raumes X , so heißt wie üblich $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, wenn eine Verfeinerungsabbildung $\mu: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ existiert, das heißt $V \subset \mu(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$. μ kann ohne Einschränkungen äquivariant gewählt werden (man beachte, daß $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ G -Mengen

sind wegen Bedingung i) von Definition 2.15). Dazu wähle man Repräsentanten V der Orbits GV von $\mathcal{V}$ und zu jedem solchen V ein $\mu(V) \in \mathcal{U}$ mit $V \subset \mu(V)$; dann setze man μ äquivariant fort:

$$\mu(gV) := g\mu(V) \quad \text{für } g \in G, V \text{ Repräsentant von } GV.$$

Dies ist wohldefiniert, denn aus $gV = g'V$ folgt

$$g\mu(V) \cap g'\mu(V) \supset gV \cap g'V \neq \emptyset, \quad \text{also mit a) } g\mu(V) = g'\mu(V).$$

d) Sind $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ G -Überdeckungen von X und $\mu: \mathcal{V} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$ wie in c), so induziert μ wie üblich eine simpliziale Abbildung $N\mu: N\mathcal{V} \rightarrow N\mathcal{U}$, denn $\mathcal{U} = (N\mathcal{U})^0$, $\mathcal{V} = (N\mathcal{V})^0$. Aus der Äquivarianz von μ folgt offensichtlich die von $N\mu$.

Ist $\mu': \mathcal{V} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$ eine weitere Verfeinerungsabbildung, so können $N\mu$ und $N\mu'$ verschieden sein, aber sie sind kontiguos; das heißt für alle $x \in N\mathcal{V}$ liegen $N\mu(x)$ und $N\mu'(x)$ in einem Simplex von $N\mathcal{U}$ (das gilt ja schon für nichtäquivalente Verfeinerungen). Aus der nächsten Proposition folgt nun, daß $N\mu$ und $N\mu'$ äquivariant homotop sind.

2.17 Proposition: Seien K ein G -Komplex und Y ein G -Raum sowie

$$f_0, f_1: Y \xrightarrow{G} K \text{ kontiguos. Dann sind } f_0 \text{ und } f_1 \text{ } G\text{-homotop.}$$

Beweis: Die übliche Homotopie (siehe Dold [15], A.2.22) ist automatisch äquivariant. Da wir aber noch öfter auf Dold verweisen werden, und da der Beweis die nächste Definition motiviert, sei er hier skizziert.

Seien v_j , $j \in J$, die Ecken von K . $\{v_j: j \in J\}$ und damit J sind G -Mengen, da G simplizial operiert: $gv_j = v_{gj}$.

$\rho_j: K \rightarrow I = [0, 1]$, $j \in J$, seien die baryzentrischen Koordinaten (ρ_j simplizial, $\rho_j v_i = \delta_{ij}$). ρ_j ist im allgemeinen nicht invariant, sondern es gilt:

$$\rho_j(x) = \rho_{gj}(gx), \quad j \in J, \quad x \in K, \quad g \in G,$$

da G simplizial operiert. Die Homotopie $f: Y \times I \longrightarrow K$ wird definiert durch:

$$\rho_j(f(y, t)) := (1-t)\rho_j \circ f_0(y) + t\rho_j \circ f_1(y).$$

f ist wohldefiniert, da f_0 und f_1 kontiguos sind. f ist äquivariant, denn für $j \in J$, $g \in G$, $y \in Y$, $t \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} \rho_{gj}(f(gy, t)) &= (1-t)\rho_{gj} \circ f_0(gy) + t\rho_{gj} \circ f_1(gy) = \\ &= (1-t)\rho_{gj}(gf_0(y)) + t\rho_{gj}(gf_1(y)) = \\ &= (1-t)\rho_j(f_0(y)) + t\rho_j(f_1(y)) = \\ &= \rho_j(f(y, t)) = \rho_{gj}(gf(y, t)) \end{aligned}$$

Somit $f(gy, t) = gf(y, t)$.

f ist stetig, wenn wir K mit der von den baryzentrischen Koordinaten erzeugten starken Topologie $\mathcal{T}^S$ versehen; sei $K^S := (K, \mathcal{T}^S)$. Ist K lokalkompakt, so sind wir fertig, da dann $K^S = K$. Im allgemeinen Fall überlegt man sich zuerst, daß K^S G -Raum ist, denn die Operation $G \times K^S \longrightarrow K^S$ ist stetig, wenn für alle $g \in G$ $\hat{g}: K^S \ni x \mapsto gx \in K^S$ stetig ist (G diskret). Und $\hat{g}$ ist stetig, wenn $\rho_j \circ \hat{g}: K^S \longrightarrow I$ stetig ist für alle $j \in J$. Dies ist aber der Fall wegen

$$\rho_j \circ \hat{g}(x) = \rho_j(gx) = \rho_{(g^{-1}j)}(x),$$

also $\rho_j \circ \hat{g} = \rho_{(g^{-1}j)}$ stetig. Als nächstes zeigt man wie in Dold loc. cit. A.2.9, daß K^S und K G -homotopieäquivalent sind (der Beweis überträgt sich fast wörtlich). Somit ist

$$f^S: Y \times I \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\text{id}} K^S \xrightarrow{\simeq} K$$

G -Homotopie zwischen f_0^S und $f_1^S: Y \longrightarrow K \xrightarrow{\text{id}} K^S \xrightarrow{\simeq} K$, und f_0^S (bzw. f_1^S) ist G -homotop zu f_0 (bzw. f_1). ■

2.18 Definition: Sei $\mathcal{U}$ G-Überdeckung eines G-Raumes X .

a) Eine G-Partition der 1 ist eine Familie $\pi = (\pi_j: X \rightarrow I)_{j \in J}$ stetiger Funktionen, J G-Menge, mit

$$i) \sum_{j \in J} \pi_j(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in X \text{ und}$$

$$ii) \pi_{gj}(gx) = \pi_j(x) \quad \text{für alle } g \in G, j \in J, x \in X.$$

π heißt punktendlich, wenn für alle $x \in X$ die Menge

$\{j \in J: \pi_j(x) \neq 0\}$ endlich ist [wegen i) ist sie höchstens abzählbar unendlich].

π heißt lokalendlich, wenn für alle $x \in X$ eine Umgebung U existiert mit $\{j \in J: \pi_j|_U \neq 0\}$ endlich.

b) Eine G-Partition der 1 $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ heißt G-Numerierung von $\mathcal{U}$, falls $\mathcal{U} \hat{=} \bigcup_{j \in J} U \hat{=} j(U)$ -, π lokalendlich und für alle $U \in \mathcal{U}$: $\pi_j^{-1}([0,1]) \subset U$. $\mathcal{U}$ heißt dann G-numerierbar.

Die Menge der G-numerierbaren G-Überdeckungen von X durch offene Mengen wird mit Ω_G^X bezeichnet. Verfeinerung ($\leq$) ist eine Ordnung auf Ω_G^X und macht Ω_G^X wie üblich zu einer Kategorie.

c) Ist $\pi = (\pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine G-Numerierung von $\mathcal{U}$, so definieren wir $\bar{\pi}: X \longrightarrow N\mathcal{U}$ durch $\rho_U(\bar{\pi}(x)) = \pi_U(x)$; $\rho = (\rho_U)_{U \in \mathcal{U}}$ die baryzentrischen Koordinaten von $N\mathcal{U}$.

2.19 Bemerkungen: a) In einem G-Komplex K sind die baryzentrischen Koordinaten $\rho = (\rho_j)_{j \in J}$ eine G-Numerierung der offenen-Stern-Überdeckung von K , wobei letztere gerade aus den $\rho_j^{-1}([0,1])$, $j \in J$, besteht.

b) Wie in Dold loc. cit. A.2.8 kann man zeigen, daß es zu jeder G-Partition der 1 $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ eine lokalendliche G-Partition der 1 $\rho = (\rho_j)_{j \in J}$ gibt mit

$$\rho_j^{-1}([0,1]) \subset \pi_j^{-1}([0,1]), \quad j \in J.$$

c) Die in 2.18c) definierte Abbildung $\bar{\pi}: X \rightarrow N\mathcal{U}$ ist stetig, da π lokalendlich ist. Denn dann bildet $\bar{\pi}$ genügend kleine Umgebungen jedes Punktes $x \in X$ auf endliche G -Unterkomplexe von $N\mathcal{U}$ ab, und auf denen stimmen starke und schwache Topologie überein. $\bar{\pi}$ ist offensichtlich auch äquivalent (für $g \in G, U \in \mathcal{U}, x \in X$):

$$\rho_{gU}(\bar{\pi}(gx)) = \pi_{gU}(gx) = \pi_U(x) = \rho_U(\bar{\pi}(x)) = \rho_{gU}(g\bar{\pi}(x)),$$

also $\bar{\pi}(gx) = g\bar{\pi}(x)$.

Ist π' eine andere G -Numerierung von $\mathcal{U}$, so sind $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ kontiguos (klar), also G -homotop.

d) Sind X, Y G -Räume, $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$ und $f: Y \xrightarrow{G} X$, so liegt $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ in Ω_G^Y :

Man rechnet leicht nach, daß $f^{-1}(\mathcal{U})$ eine G -Überdeckung ist. Ist $\pi = (\pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine G -Numerierung von $\mathcal{U}$, so ist

$$\rho = (\rho_V)_{V \in f^{-1}(\mathcal{U})}, \quad \rho_V = \sum_{U \in \mathcal{U}, V = f^{-1}U} \pi_U \circ f: Y \rightarrow I,$$

eine G -Numerierung von Y .

Offenbar folgt $f^{-1}\mathcal{U} \leq f^{-1}\mathcal{V}$ aus $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. Somit induziert f einen Funktor (ordnungserhaltende Abbildung)

$$\Omega_G^f: \Omega_G^X \longrightarrow \Omega_G^Y.$$

2.20 Lemma: Sei X G -Raum, $\mathcal{U}$ eine numerierbare Überdeckung von X , das heißt $\mathcal{U} \in \Omega_{(e)}^X$. Dann existiert ein $\mathcal{V} \in \Omega_G^X$ mit $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.

Beweis: 1. Schritt: $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \Omega^X \Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V} := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, U \cap V \neq \emptyset\} \in \Omega^X$

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ist offenbar eine Überdeckung von X .

Sind $\pi = (\pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$, $\rho = (\rho_V)_{V \in \mathcal{V}}$ Numerierungen von $\mathcal{U}$ beziehungsweise $\mathcal{V}$, so setzen wir für $W \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $x \in X$:

$$\tilde{\sigma}_W(x) := \sum \min\{\pi_U(x), \rho_V(x)\},$$

wobei über alle $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ mit $U \cap V = W$ summiert wird. Dann sieht man leicht:

$\tilde{\sigma}_W: X \rightarrow [0,1]$ ist stetig

$\tilde{\sigma}_W^{-1}([0,1]) \subset W$

$\{\tilde{\sigma}_W: W \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}\}$ ist lokalendlich

$\tilde{\sigma}(x) := \sum_W \tilde{\sigma}_W(x) \in \mathbb{R}^+$ für $x \in X$, $\tilde{\sigma}: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ stetig.

Somit ist $\sigma := (\sigma_W)_{W \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}}$, $\sigma_W := \tilde{\sigma}_W / \tilde{\sigma}$, eine Numerierung von $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, das heißt $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \Omega^X$.

2. Schritt: $\forall \mathcal{U} \in \Omega^X: \exists \mathcal{V} \in \Omega_G^X: \mathcal{U} \leq \mathcal{V}$

Sei $\mathcal{U} \in \Omega^X$. Dann ist für $g \in G$ auch $g\mathcal{U} = \{gU: U \in \mathcal{U}\} \in \Omega^X$ (klar).

Also ist nach dem ersten Schritt

$$\tilde{\mathcal{U}} := \bigcup_{g \in G} g\mathcal{U} \in \Omega^X.$$

$\mathcal{U} \leq \tilde{\mathcal{U}}$ ist nun ebenso klar wie $g\tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}}$ für alle $g \in G$.

Bredon [10], S. 134, konstruiert zu jedem solchen $\tilde{\mathcal{U}}$ ein $\mathcal{V} \in \Omega_G^X$ mit $\tilde{\mathcal{U}} \leq \mathcal{V}$, also auch $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. ■

2.21 Proposition: Sei X ein G -Raum.

a) Ω_G^X ist gerichtet durch Verfeinerung.

b) Falls X parakompakt, so ist Ω_G^X kofinal in der Menge aller offenen Überdeckungen von X .

Beweis: a) und b) gelten für Ω^X statt Ω_G^X . Mit Lemma 2.20 folgt die Behauptung. ■

Nach diesen Vorbereitungen, die ungefähr dem ersten Schritt von S. 88 entsprechen, können wir zu jeder äquivarianten Kohomologietheorie h_G^* wie üblich eine äquivariante Čech-Kohomologietheorie $\check{h}_G^*$ definieren. Um uns einige Indizes zu ersparen, betrachten wir die folgende allgemeinere Situation.

$G\mathcal{P}OI$ sei die Kategorie der G -Polyeder und G -Abbildungen. $G\mathcal{P}OI$ ist eine volle Unterkategorie von $G\mathcal{P}O\mathcal{P}$. Sei $F: G\mathcal{P}OI \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ ein G -homotopieinvarianter kontravarianter Funktor, zum Beispiel $F = \omega_G^*$ oder $F = \omega_G^\alpha$, $\alpha \in RO(G)$.

2.22 Definition: Die G -Čech-Erweiterung $\check{F}: G\mathcal{P}O\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ von F ist definiert durch:

$$i) \check{F}(X) := \operatorname{colim}_{\mathcal{U} \in \Omega_G^X} F(N\mathcal{U}) \quad \text{für einen } G\text{-Raum } X.$$

Der Kolimes kommt von den Verfeinerungsabbildungen:

$$\mathcal{U} \leq \mathcal{V}, \mu: \mathcal{Y} \xrightarrow{G} \mathcal{U} \text{ induziert } N\mu: N\mathcal{Y} \xrightarrow{G} N\mathcal{U} \text{ und somit} \\ F(N\mu): F(N\mathcal{U}) \rightarrow F(N\mathcal{Y}).$$

$F(N\mu)$ ist unabhängig von der Wahl von μ , denn $N\mu$ ist nach Bemerkung 2.16d) bis auf G -Homotopie eindeutig bestimmt, und F war als G -homotopieinvariant vorausgesetzt.

ii) Sei $f: \mathcal{Y} \xrightarrow{G} X$. f induziert

$$\Omega_G^f: \Omega_G^X \longrightarrow \Omega_G^{\mathcal{Y}}, \mathcal{U} \mapsto f^{-1}(\mathcal{U}).$$

Zu $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$ gibt es eine äquivalente Abbildung $\nu: f^{-1}\mathcal{U} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$ mit $f^{-1}(\nu V) = V$ für alle $V \in f^{-1}(\mathcal{U})$:

Man definiert ν zuerst auf Repräsentanten von Orbits von $f^{-1}\mathcal{U}$ und setzt äquvariant fort. Dies ist wohldefiniert: $gV = g'V \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{-1}(g\nu V \cap g'\nu V) = gf^{-1}(\nu V) \cap g'f^{-1}(\nu V) = gV \cap g'V \neq \emptyset \\ \Rightarrow g\nu V \cap g'\nu V \neq \emptyset \Rightarrow g\nu V = g'\nu V.$$

Dieses ν induziert eine simpliziale Abbildung

$$N\nu: Nf^{-1}\mathcal{U} \xrightarrow{G} N\mathcal{U}.$$

Ist $\nu': f^{-1}\mathcal{U} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$ eine andere Wahl mit $f^{-1}(\nu'V) = V$, so sind $N\nu$ und $N\nu'$ kontiguos, also G -homotop:

$$\bigcap_{i=0}^n V_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=0}^n (\nu V_i \cap \nu' V_i) \neq \emptyset \quad (\text{wende } f^{-1} \text{ an}),$$

das heißt $N\nu$ und $N\nu'$ bilden das Simplex von $Nf^{-1}(\mathcal{U})$ mit den Ecken $V_0, \dots, V_n$ ab in das Simplex von $N\mathcal{U}$ mit den Ecken $\nu V_0, \dots, \nu V_n, \nu' V_0, \dots, \nu' V_n$. (Diese Ecken sind nicht notwendig verschieden. Wichtig ist, daß sie ein Simplex von $N\mathcal{U}$ aufspannen.)

Wegen der G-Homotopieinvarianz von F ist somit

$$F(N\nu): F(N\mathcal{U}) \longrightarrow F(Nf^{-1}\mathcal{U})$$

unabhängig von der Wahl von ν .

Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{X}_G$ mit $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, so seien $\mu: \mathcal{V} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$ und $\mu': f^{-1}\mathcal{V} \xrightarrow{G} f^{-1}\mathcal{U}$ Verfeinerungen, $\nu: f^{-1}\mathcal{U} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$ und $\nu': f^{-1}\mathcal{V} \xrightarrow{G} \mathcal{V}$ wie oben. Das Diagramm

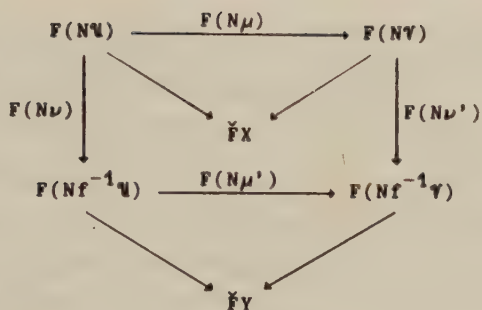
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xleftarrow{\mu} & \mathcal{V} \\ \uparrow \nu & & \uparrow \nu' \\ f^{-1}\mathcal{U} & \xleftarrow{\mu'} & f^{-1}\mathcal{V} \end{array}$$

ist im allgemeinen nicht kommutativ, aber es gilt für $W_0, \dots, W_n \in f^{-1}\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=0}^n W_i \neq \emptyset &\Rightarrow \bigcap_{i=0}^n (\mu\nu'W_i \cap \nu\mu'W_i) \neq \emptyset, \text{ denn} \\ f^{-1}\nu'W_i = W_i &\Rightarrow \mu\nu'W_i \supset \nu'W_i \supset f(W_i) \\ \mu'W_i \supset W_i &\Rightarrow f^{-1}\nu\mu'W_i = \mu'W_i \supset W_i \\ &\Rightarrow \nu\mu'W_i \supset ff^{-1}\nu\mu'W_i \supset f(W_i) \end{aligned}$$

$$\text{Somit: } \bigcap_{i=0}^n (\mu\nu'W_i \cap \nu\mu'W_i) \supset \bigcap_{i=0}^n f(W_i) \supset f\left(\bigcap_{i=0}^n W_i\right) \neq \emptyset.$$

Das bedeutet aber, daß $N(\mu\nu') = N\mu \circ N\nu'$ und $N(\nu\mu') = N\nu \circ N\mu'$ kontiguos, also G-homotop sind. Dann kommutiert das Diagramm



Folglich existiert genau ein Homomorphismus

$$f^* = \check{F}(f): \check{F}X \rightarrow \check{F}Y,$$

der obiges Diagramm kommutativ ergänzt. ■

Wir haben hier die Konstruktion von $\check{F}$ ausführlich dargestellt und dazu die Definition 2.14 aus Dold loc. cit. Appendix sogar ausgearbeitet. Im folgenden werden wir uns oft kürzer fassen und nur die Unterschiede zu Dold herausstellen.

2.23 Proposition: a) $\check{F}: G\mathcal{O}P \longrightarrow \mathcal{A}B$ ist ein kontravarianter Funktor.

b) $\check{F}$ ist homotopieinvariant.

c) $\check{F}$ ist Erweiterung von F , das heißt für $P \in G\mathcal{O}P$ gibt es einen Isomorphismus $\rho = \rho(P): FP \longrightarrow \check{F}P$, und dieser Isomorphismus ist natürlich in P .

Beweis: a) Man überlegt sich leicht, daß $\check{F}(g) \circ \check{F}(f)$ obiges Diagramm für $\check{F}(f \circ g)$ kommutativ ergänzt ($f: Y \xrightarrow{G} X$, $g: Z \xrightarrow{G} Y$), ebenso $\text{id}: \check{F}X \longrightarrow \check{F}X$ das für $\check{F}(\text{id}_X)$.

b) Hier überträgt sich der Beweis in Dold loc. cit. A.3.6 wörtlich. Man benötigt nur zu jedem $\forall \in \Omega_G^{X \times I}$, X G -Raum, $I = [0,1]$ trivialer G -Raum, ein $\forall \in \Omega_G^X$ und eine invariante

Funktion $r: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{N}$ mit Werten $rU \geq 2$, so daß jede Menge

$$U \times \left[\frac{i-1}{rU}, \frac{i+1}{rU} \right], \quad U \in \mathcal{U}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq rU-1,$$

in einem $W \in \mathcal{W}$ enthalten ist. Dold loc.cit. konstruiert im Appendix, Proposition 2.19, ein solches $\mathcal{U} \in \Omega^X$ mit dazugehörigem r . Falls $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$ oder r nicht invariant ist, so ersetzen wir $\mathcal{U}$ durch $\mathcal{V} \in \Omega_G^X$ mit $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ (Lemma 2.20). $s: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{N}$ wird repräsentantenweise definiert und dann invariant fortgesetzt. Und zwar wählen wir für einen Repräsentanten V eines Orbits GV von $\mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subset U$ und setzen

$$s(gV) := rU \quad \text{für alle } g \in G.$$

Offenbar gilt für $1 \leq i \leq sV-1$

$$V \times \left[\frac{i-1}{sV}, \frac{i+1}{sV} \right] \subset U \times \left[\frac{i-1}{rU}, \frac{i+1}{rU} \right] \subset W, \quad W \in \mathcal{W} \text{ geeignet.}$$

Also auch

$$gV \times \left[\frac{i-1}{s(gV)}, \frac{i+1}{s(gV)} \right] = gV \times \left[\frac{i-1}{sV}, \frac{i+1}{sV} \right] \subset gW \in \mathcal{W}.$$

$\mathcal{V}$ und s erfüllen somit alle Forderungen.

- c) Auch hier verweisen wir auf Dold loc. cit. A.3.7. Die Übertragung benötigt allerdings die folgende nicht triviale topologische Tatsache:

Zu jedem $\mathcal{U} \in \Omega_G^P$ gibt es eine G -Triangulierung von P , so daß die Überdeckung von P durch offene Sterne feiner ist als $\mathcal{U}$.

Sei also $\mathcal{U} \in \Omega_G^P$. Dann existiert eine Verfeinerung $\mathcal{V} \in \Omega_G^P$ von $\mathcal{U}$, $\mu: \mathcal{V} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$, mit der Eigenschaft:

$$V \cap V' \neq \emptyset \Rightarrow V' \subset \mu V \quad \text{für alle } V, V' \in \mathcal{V}$$

(Bredon [10], III.6.3, Beweis; $\mathcal{V}$ heißt Stern-Verfeinerung von $\mathcal{U}$). Sei $p: P \rightarrow Q := P/G$ die Projektion, K eine G -Triangulierung von P , $L := K/G$ die induzierte Triangulierung von Q . Weiter sei $p(\mathcal{V}) := \{p(V) : V \in \mathcal{V}\}$. $p(\mathcal{V})$ ist eine Über-

deckung von Q . Nun gibt es eine Unterteilung $\tilde{L}$ von L , so daß jedes Simplex von $\tilde{L}$ in einem $p(V) \in p(\mathcal{V})$ liegt (existiert nach Whitehead [50], Theorem 35). $\tilde{L}$ induziert eine Unterteilung $\tilde{K}$ von K vermöge p , da für jedes Simplex σ von K $p|: \sigma \rightarrow p(\sigma)$ linearer Isomorphismus ist. G operiert simplizial auf $\tilde{K}$, da G simplizial auf K operiert und für alle $g \in G$ und alle Simplices σ von K das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{g} & g\sigma \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & p(\sigma) & \end{array}$$

kommutiert. Ohne Einschränkungen ist $\tilde{K}$ sogar ein G -Komplex, denn sonst ersetzen wir $\tilde{K}$ durch seine zweite baryzentrische Unterteilung (siehe Bemerkung 2.12a)). $\tilde{K}$ ist die gewünschte G -Triangulierung von P :

Ist nämlich τ ein Simplex von $\tilde{K}$, so gibt es ein $V \in \mathcal{V}$ mit $p(\tau) \subset p(V)$, also $\tau \subset GV$. Dann liegt τ aber schon in einem $gV \in \mathcal{V}$, $g \in G$ (Bemerkung 2.16a)). Somit liegt jeder offene Stern von $\tilde{K}$ in einem $U \in \mathcal{U}$, da $\mathcal{V}$ eine Stern-Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. ■

Wir können nun daran gehen, die noch fehlenden beiden Schritte zum Beweis von Satz 2.10 durchzuführen, nämlich:

2. Schritt: Für $X \subset S^W$ kompakt, $\alpha \in RO(G)$ gilt: $\tilde{\omega}_G^\alpha(X) \approx \tilde{\omega}_G^\alpha(X)$.
3. Schritt: Zeige für $X \subset S^W$ kompakt, daß die Menge der $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$ mit $\dim(N\mathcal{U})/G \leq \dim X$ kofinal ist in Ω_G^X .

Wir beweisen zuerst den dritten Schritt (Lemma 2.24), da er einfacher ist. Der zweite Schritt wird dann in Proposition 2.29 gezeigt werden.

2.24 Lemma: Sei X kompakter metrisierbarer G -Raum, $d := \dim X = \dim X/G \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Menge der endlichen $\mathcal{V} \in \Omega_G^X$ mit

$$\dim N\mathcal{V} = \dim (N\mathcal{V})/G \leq d$$

kofinal in Ω_G^X .

Beweis: Sei $m: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Metrik auf X . m kann als invariant [$m(gx, gy) = m(x, y)$] vorausgesetzt werden, denn sonst ersetze man m durch

$$\tilde{m}(x, y) := \sum_{g \in G} m(gx, gy).$$

Weiter sei $p: X \rightarrow X/G =: \bar{X}$ die kanonische Projektion. Ist $\mathcal{V} \in \Omega_G^X$, so überdeckt $p(\mathcal{V}) = \{p(V) \subset \bar{X}: V \in \mathcal{V}\}$ $\bar{X}$. Somit existiert eine endliche Verfeinerung $\mathcal{W}$ von $p(\mathcal{V})$, $\mu: \mathcal{W} \rightarrow p(\mathcal{V})$, mit $\dim N\mathcal{W} \leq d$; $\mathcal{W}$ sei eine Überdeckung durch offene Mengen. Wir wollen nun $\mathcal{W}$ auf X liften, das heißt eine G -Überdeckung $\mathcal{U}$ von X konstruieren mit $p(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$.

Zu $W \in \mathcal{W}$ gibt es $\lambda W \in \mathcal{V}$ mit $p(\lambda W) = \mu W \in p(\mathcal{V})$. Wir setzen:

$$\kappa: \mathcal{W} \rightarrow 2^X, \quad \kappa W := p^{-1}(W) \cap \lambda W \subset \lambda W \in \mathcal{V}.$$

$$\mathcal{U} := \{g\kappa W \subset X: g \in G, W \in \mathcal{W}\}$$

Behauptung: $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$

Dann haben wir:

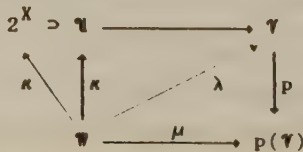
$\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, denn $g\kappa W \subset g\lambda W \in \mathcal{V}$ für $g \in G, W \in \mathcal{W}$,

$p\mathcal{U} = \mathcal{W}$, denn $p(g\kappa W) = p(\kappa W) = W$ für $g \in G, W \in \mathcal{W}$.

Somit $(N\mathcal{U})/G = N(p(\mathcal{U})) = N\mathcal{W}$ (Bredon loc. cit. III.6.2)

und folglich $\dim (N\mathcal{U})/G \leq d$.

Beweis der Behauptung:



i) $\mathcal{U}$ überdeckt X durch offene Teilmengen

Zu $x \in X$ gibt es $W \in \mathcal{W}$ mit $p(x) \in W \subset \mu W \in p(\mathcal{V})$. Also

$$x \in p^{-1}(W) = p^{-1}(W) \cap \bigcup_{g \in G} g\lambda W = \bigcup_{g \in G} g\kappa W.$$

$g\kappa W \subset X$ offen, da $W \subset X/G$ offen, $p: X \longrightarrow X/G$ stetig,

$\lambda W \subset X$ offen, also $\kappa W = p^{-1}(W) \cap \lambda W$ und $g\kappa W$ offen.

ii) $g(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ für alle $g \in G$ ist klar.

iii) Seien $H < G$, $h_0, \dots, h_n \in H$, $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$\bigcap_{i=0}^n U_i \neq \emptyset \neq \bigcap_{i=0}^n h_i U_i.$$

Sei $U_i = g_i \kappa W_i$ mit $g_i \in G$, $W_i \in \mathcal{W}$, $i=0, \dots, n$. Dann:

$$\bigcap_{i=0}^n g_i \lambda W_i \supset \bigcap_{i=0}^n g_i \kappa W_i \neq \emptyset \neq \bigcap_{i=0}^n h_i g_i \kappa W_i \subset \bigcap_{i=0}^n h_i g_i \lambda W_i$$

Da $\mathcal{V}$ eine G -Überdeckung ist und alle $g_i \lambda W_i \in \mathcal{V}$, gibt es ein $h \in H$ mit $h g_i \lambda W_i = h_i g_i \lambda W_i$, $i=0, \dots, n$. Daraus folgt für $i=0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} h U_i &= h g_i \kappa W_i = p^{-1}(W_i) \cap h g_i \lambda W_i = p^{-1}(W_i) \cap h_i g_i \lambda W_i = \\ &= h_i g_i \kappa W_i = h_i U_i. \end{aligned}$$

iv) $\mathcal{U}$ ist G -numerierbar

$\mathcal{U}$ ist endlich, da $\mathcal{W}$ und G endlich sind. Für $U \in \mathcal{U}$ können wir also $\pi_U: X \longrightarrow [0,1]$ definieren durch:

$$\pi_U(x) := m(x, X-U) / \left[\sum_{U' \in \mathcal{U}} m(x, X-U') \right], \quad x \in X.$$

π_U ist wohldefiniert, da $\mathcal{U}$ endliche offene Überdeckung von X ist, somit $\sum_{U'} m(x, X-U') > 0$ für alle $x \in X$.

π_U ist stetig, da m stetig ist.

$(\pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ ist offensichtlich Partition der 1.

$$\begin{aligned} \pi_{gU}(gx) &= m(gx, X-gU) / \left[\sum m(gx, X-U') \right] = \\ &= m(gx, g(X-U)) / \left[\sum m(gx, g(X-U')) \right] = \\ &= m(x, X-U) / \left[\sum m(x, X-U') \right] = \pi_U(x) \end{aligned}$$

Hier geht die Invarianz von m ein. ■

Als Korollar erhalten wir:

2.25 Proposition: Sei $X \subset S^W$ kompakt, W G -Modul. Dann gilt für alle $\alpha \in RO(G)$:

$$FPdim \alpha > \dim X/G \Rightarrow \check{\omega}_G^\alpha(X) \neq \{0\}.$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Definition 2.22i) von $\check{\omega}_G^\alpha$, Lemma 2.24 und Proposition 2.13. ■

Der Beweis von Satz 2.10 ist somit abgeschlossen, wenn wir für $X \subset S^W$, W ein G -Modul, $\alpha \in RO(G)$, $\check{\omega}_G^\alpha(X) \neq \check{\omega}_G^\alpha(X)$ gezeigt haben. Der folgende Satz ist der Schlüssel dafür.

2.26 Satz: Jede differenzierbare G -Mannigfaltigkeit M ist ein G -Polyeder, das heißt sie ist G -triangulierbar.

Beweis: Illman [27], Theorem 7.1. G darf hier sogar eine beliebige kompakte Lie-Gruppe sein. ■

Zur Erinnerung: M heißt differenzierbare G -Mannigfaltigkeit, wenn M (und damit $G \times M$) differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und eine differenzierbare Operation $G \times M \rightarrow M$ von G auf M existiert. Für einen G -Modul W sind natürlich S^W und damit alle offenen G -Teilmengen von S^W differenzierbare G -Mannigfaltigkeiten (siehe Bemerkung 1.1g)). Die Idee zum Beweis des zweiten Schrittes ist nun, daß wir G -Umgebungen V von X in S^W betrachten, die gleichzeitig G -Polyeder sind (zum Beispiel $V \subset S^W$ offen). Für ein solches V und für ein $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$ sehen wir dann sowohl $X \xrightarrow{G} V$ als auch $\bar{\pi}: X \xrightarrow{G} N\mathcal{U}$, π eine G -Numerierung von $\mathcal{U}$, als " G -Polyeder unter X " an. Wir betrachten die Kategorie $\mathcal{P}_G^X$ aller G -Polyeder unter X , $\{\xi: X \xrightarrow{G} R_\xi\}$, zeigen, daß $\text{colim}_\xi F(R_\xi)$ existiert (für $F: G\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ G -homotopieinvarianter kontravarianter

Funktor), isomorph ist zu $\check{F}X$, und daß die $X \xrightarrow{G} V$ kofinal sind in dieser Kategorie. Für $F = \omega_G^*$ erhalten wir dann:

$$\check{\omega}_G^*(X) \cong \operatorname{colim}_{\xi} \omega_G^*(R_{\xi}) \cong \operatorname{colim}_V \omega_G^*(V) \cong \check{\omega}_G^*(X).$$

2.27 Definition: Sei X ein G -Raum.

- a) Die Kategorie $\mathcal{P}_G^X$ der G -Polyeder unter X hat als Objekte G -Homotopieklassen $[\xi]$ von Abbildungen $\xi: X \xrightarrow{G} R_{\xi}$ mit $R_{\xi} \in G\mathcal{OZ}$. Ein Morphismus von $[\xi]$ nach $[\eta]$ ist eine G -Homotopieklassse $[\alpha]$ von Abbildungen $\alpha: R_{\xi} \xrightarrow{G} R_{\eta}$, so daß

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \xi \swarrow & & \searrow \eta \\ R_{\xi} & \xrightarrow{\alpha} & R_{\eta} \end{array}$$

bis auf G -Homotopie kommutiert, $\alpha\xi \cong \eta$.

- b) Die duale Kategorie von $\mathcal{P}_G^X$ wird mit Λ_G^X bezeichnet. Λ_G^X besitzt dieselben Objekte wie $\mathcal{P}_G^X$; eine Homotopieklassse von Abbildungen $\alpha: R_{\xi} \xrightarrow{G} R_{\eta}$ wie in a) wird als Morphismus von $[\eta]$ nach $[\xi]$ aufgefaßt.

Unser homotopieinvarianter kontravarianter Funktor $F: G\mathcal{OZ} \rightarrow \mathcal{A}$ induziert nun für jeden G -Raum X einen Funktor

$$F^X: \Lambda_G^X \longrightarrow \mathcal{A}, [\xi] \mapsto F(R_{\xi}),$$

$$[\alpha: R_{\xi} \xrightarrow{G} R_{\eta}] \mapsto (F\alpha: FR_{\eta} \longrightarrow FR_{\xi}).$$

Man beachte, daß F^X kovariant ist, da wir mit Λ_G^X und nicht mit $\mathcal{P}_G^X$ arbeiten.

2.28 Proposition: Die natürliche Transformation

$$(FR_{\xi} \xrightarrow{\rho} \check{F}R_{\xi} \xrightarrow{\check{F}\xi} \check{F}X)_{[\xi] \in \Lambda_G^X}$$

zwischen den Funktoren F^X und $\check{F}X$ ist universal, also

$$\operatorname{colim} F^X \cong \check{F}X.$$

Erläuterung: $\check{F}X$ wird hier als konstanter Funktor $\wedge_G^X \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ aufgefaßt. $\rho = \rho(R_\xi)$ ist der natürliche Isomorphismus aus Proposition 2.23c). Proposition 2.28 besagt, daß für jede andere natürliche Transformation $\varphi: F^X \longrightarrow K$, wobei $K \in \mathcal{A}\mathcal{B}$ wieder als konstanter Funktor $\wedge_G^X \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ aufgefaßt wird, genau ein Morphismus $\psi: \check{F}X \longrightarrow K$ von abelschen Gruppen existiert, so daß

$$\begin{array}{ccc} F^X([\xi]) = FR_\xi & \xrightarrow{\quad} & \check{F}X \\ & \searrow \varphi[\xi] & \swarrow \psi \\ & K & \end{array}$$

kommutiert, $[\xi] \in \wedge_G^X$ beliebig.

Beweis: Dold loc. cit. A.3.8. Die einzige topologische Aussage, die er benötigt, ist, daß jedes $\xi: X \xrightarrow{G} R_\xi$ bis auf G -Homotopie über eine G -Numerierung faktorisiert, das heißt es gibt ein $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$ mit G -Numerierung π und eine Abbildung $\alpha: N\mathcal{U} \xrightarrow{G} R_\xi$, so daß

$$\xi \stackrel{G}{=} \alpha \circ \bar{\pi}: X \xrightarrow{\bar{\pi}} N\mathcal{U} \xrightarrow{\alpha} R_\xi.$$

Um dies zu zeigen, betrachten wir eine G -Triangulierung von R_ξ mit Ecken $\{v_j: j \in J\}$ und baryzentrischen Koordinaten $\rho_j: R_\xi \longrightarrow [0,1]$, $j \in J$. Wir setzen

$$\mathcal{U} := \{(\rho_j \circ \xi)^{-1}([0,1]): j \in J\} \subset 2^X.$$

Nach Bemerkung 2.19a), d) ist $\mathcal{U} \in \Omega_G^X$; sei $\pi = (\pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine G -Numerierung von $\mathcal{U}$. Nun wählen wir für Repräsentanten U von Orbits GU von $\mathcal{U}$ ein $j = j(U) \in J$ mit $U = (\rho_j \circ \xi)^{-1}([0,1])$, und erhalten eine äquivariante Abbildung $\mathcal{U} \xrightarrow{G} J$, $gU \mapsto g \cdot j(U)$ für $g \in G$, $U \in \mathcal{U}$ Repräsentant von GU . Dies ist wie üblich wohldefiniert:

$gU = g'U$ mit $g, g' \in G$, $U = (\beta_j \circ \xi)^{-1}(\{0, 1\})$, $j = j(U)$,

impliziert:

$$(\beta_{gj} \circ \xi)^{-1}(\{0, 1\}) = gU = g'U = (\beta_{g'j} \circ \xi)^{-1}(\{0, 1\}),$$

somit

$$\beta_{gj}^{-1}(\{0, 1\}) \cap \beta_{g'j}^{-1}(\{0, 1\}) \supset \xi(gU) \neq \emptyset,$$

das heißt v_{gj} und $v_{g'j} = g'g^{-1}v_{gj}$ liegen in einem Simplex von R_ξ , woraus nach Bemerkung 2.12b) $gj = g'j$ folgt.

Diese äquivariante Abbildung $\mathcal{U} \xrightarrow{G} J$ induziert nun eine simpliziale Abbildung $\alpha: N\mathcal{U} \xrightarrow{G} R_\xi$, und es gilt: $\xi \stackrel{G}{\simeq} \alpha \circ \bar{\pi}$, da die beiden Abbildungen kontiguos sind:

Sei nämlich $x \in X$. Ist $\beta_j \circ \alpha \circ \bar{\pi}(x) > 0$ für ein $j \in J$, so gibt es nach Definition von α und $\bar{\pi}$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $j(U) = j$ und $\pi_U(x) > 0$. Somit $x \in U = (\beta_j \circ \xi)^{-1}(\{0, 1\})$ oder $\beta_j \circ \xi(x) > 0$. Daraus folgt aber:

$$\{j \in J: \beta_j \circ \alpha \circ \bar{\pi}(x) > 0\} \subset \{j \in J: \beta_j \circ \xi(x) > 0\},$$

das heißt $\alpha \circ \bar{\pi}(x)$ liegt auf einer Seite des Simplexes, in dem $\xi(x)$ liegt; sie liegen also im selben (abgeschlossenen) Simplex von R_ξ . ■

Jetzt sind wir soweit, den letzten noch fehlenden (zweiten) Schritt zum Beweis von Satz 2.10 durchzuführen. W ist wieder ein fester G -Modul, $F: G\mathcal{POL} \rightarrow \mathbf{AB}$ ein homotopieinvarianter kontravarianter Funktor.

2.29 Proposition: Sei $X \subseteq S^W$ kompakt, $\mathcal{T}_G^X$ die gerichtete Menge der offenen G -Umgebungen von X in S^W (oder auch der G -Polyeder-Umgebungen in S^W). Dann ist

$$\check{F}X \simeq \operatorname{colim} FU, \\ U \in \mathcal{T}_G^X$$

wobei $\tilde{F}$ gemäß 2.22 definiert ist. Ist F sogar schon auf $G\mathcal{U}^*$ definiert, zum Beispiel $F = \omega_G^\alpha$, $\alpha \in RO(G)$, so ist

$$\tilde{F}X \cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_G(X)} FU,$$

wobei $\mathcal{U}_G(X)$ wie in Definition 2.2 die Menge aller G -Umgebungen von X in S^W ist. Für $F = \omega_G^\alpha$, $\alpha \in RO(G)$, haben wir also

$$\tilde{\omega}_G^\alpha(X) \cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_G^X(X)} \omega_G^\alpha(U) \cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{U}_G(X)} \omega_G^\alpha(U) = \tilde{\omega}_G^\alpha(X).$$

Beweis: Nach Dold loc. cit. Proposition A.1.9ii) ist zu zeigen, daß die G -Polyeder unter X von der Form $X \hookrightarrow U$, $U \in \mathcal{U}_G^X$, stark kofinal sind in Λ_G^X . Das heißt:

i) Für alle $[\xi] \in \Lambda_G^X$ gibt es $U \in \mathcal{U}_G^X$ und $\eta: U \xrightarrow{G} R_\xi$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{G} & U \\ & \searrow \xi & \searrow \eta \\ & & R_\xi \end{array}$$

bis auf G -Homotopie kommutiert.

ii) Sei $[\xi] \in \Lambda_G^X$. Sind $U_0, U_1 \in \mathcal{U}_G^X$ mit $\eta_i: U_i \xrightarrow{G} R_\xi$, $i=0,1$, wie in i), so existiert ein $U \in \mathcal{U}_G^X$, $U \stackrel{G}{\subset} U_0 \cup U_1$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{j} & U & \begin{array}{c} \xrightarrow{i_0} U_0 \\ \xrightarrow{i_1} U_1 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_0} R_\xi \\ \xrightarrow{\eta_1} R_\xi \end{array} \end{array}$$

bis auf G -Homotopie kommutiert. Man beachte, daß nach Wahl von η_0, η_1 gilt:

$$\eta_0 \circ i_0 \circ j \stackrel{G}{\cong} \eta_1 \circ i_1 \circ j.$$

In der Sprache unserer Kategorien Λ_G^X , $\mathcal{U}_G^X$ können i), ii) wie folgt formuliert werden (vergleiche Dold loc. cit. A.1.7).

Die Zuordnung

$$U \mapsto [j: X \xrightarrow{G} U],$$

$$(U \leq V) \hat{=} (V \stackrel{Q}{\supseteq} U) \mapsto [V \xrightarrow{G} U]$$

induziert einen kovarianten Funktor $\theta: \mathfrak{T}_G^X \longrightarrow \Lambda_G^X$. θ heißt stark kofinal, wenn gilt:

$$i') \quad \forall [\xi] \in \Lambda_G^X: \exists U \in \mathfrak{T}_G^X: \exists [\eta] \in \text{Mor}(\Lambda_G^X)([\xi], \theta(U))$$

$$ii') \quad \forall [\xi] \in \Lambda_G^X: \forall U_0, U_1 \in \mathfrak{T}_G^X: \forall [\eta_0] \in \text{Mor}(\Lambda_G^X)([\xi], \theta(U_0)):$$

$$\forall [\eta_1] \in \text{Mor}(\Lambda_G^X)([\xi], \theta(U_1)): \exists U \in \mathfrak{T}_G^X: U_0 \leq U \text{ und } U_1 \leq U \text{ mit:}$$

$$\theta(U_0 \leq U) \circ [\eta_0] = \theta(U_1 \leq U) \circ [\eta_1].$$

Soviel zur Formalisierung der Mathematik.

Zu i) Sei $[\xi] \in \Lambda_G^X$. Da X kompakt, ist $\xi(X)$ in einem endlichen

G -Unterkomplex von R_ξ enthalten, also ohne Einschränkungen R_ξ endlich. Dann ist R_ξ G -EUR (siehe tom Dieck [13], S. 90), das heißt es gibt einen G -Modul V , eine Einbettung $R_\xi \xrightarrow{G} V$ und eine offene G -Umgebung O von R_ξ in V mit einer Retraktion $r: O \xrightarrow{G} R_\xi$. Nach Satz 2.1 von Tietze-Gleason existiert eine Erweiterung $\psi: S^W \xrightarrow{G} V$ von $\xi: X \xrightarrow{G} R_\xi \stackrel{G}{\hookrightarrow} V$. Dann ist $U := \psi^{-1}(O)$ offene G -Umgebung von X in S^W , und

$$\eta := r \circ \psi|: U \xrightarrow{G} O \xrightarrow{G} R_\xi$$

ist eine äquivariante Erweiterung von ξ ; das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & U \\ \xi \searrow & & \swarrow \eta \\ & R_\xi & \end{array}$$

kommutiert also erst recht bis auf G -Homotopie.

ad ii) Seien $[\xi] \in \Lambda_G^X$, $U_0, U_1 \in \mathfrak{T}_G^X$, $j_i: X \xrightarrow{G} U_i$, $\eta_i: U_i \xrightarrow{G} R_\xi$,

$i=0,1$, mit $\eta_0 \circ j_0 \stackrel{G}{\simeq} \xi \stackrel{G}{\simeq} \eta_1 \circ j_1$.

Wieder können wir ohne Einschränkungen voraussetzen, daß R_ξ endlich ist. Denn falls nicht, ersetzen wir U_0, U_1 durch $U'_0, U'_1 \in \mathbb{T}_G^X$ mit $\bar{U}'_0 \stackrel{G}{\subset} U_0, \bar{U}'_1 \stackrel{G}{\subset} U_1$. Dann liegen $\xi(X), \eta_0(\bar{U}'_0)$ und $\eta_1(\bar{U}'_1)$ in einem endlichen G -Unterkomplex von R_ξ , den wir statt R_ξ nehmen.

Sei $H: X \times I \xrightarrow{G} R_\xi$ die G -Homotopie von $\eta_0 \circ j_0$ nach $\eta_1 \circ j_1$. H, η_0, η_1 induzieren

$$H': X \times I \cup (U_0 \cap U_1) \times \{0, 1\} \xrightarrow{G} R_\xi,$$

$$H'|_{X \times I} = H, H'(\cdot, 0) = \eta_0|, H'(\cdot, 1) = \eta_1|.$$

Jetzt schließen wir ähnlich wie in i).

Da $X \times I \cup (U_0 \cap U_1) \times \{0, 1\}$ abgeschlossen in $(U_0 \cap U_1) \times I$ ist, gibt es eine Erweiterung $H'': (U_0 \cap U_1) \times I \xrightarrow{G} V$ von H' , $R_\xi \stackrel{G}{\subset} \sigma \stackrel{G}{\subset} V$, $r: \sigma \xrightarrow{G} R_\xi$ wie in i). $H''^{-1}(\sigma)$ ist offene G -Umgebung von $X \times I \cup (U_0 \cap U_1) \times \{0, 1\}$ in $(U_0 \cap U_1) \times I$. Dann ist

$$U := \{x \in U_0 \cap U_1: \{x\} \times I \subset H''^{-1}(\sigma)\} \stackrel{G}{\subset} U_0 \cap U_1$$

offene G -Umgebung von X in S^W (I kompakt geht hier ein), $U \in \mathbb{T}_G^X$. Und

$$r \circ H'': U \times I \xrightarrow{G} \sigma \xrightarrow{G} R_\xi$$

ist G -Homotopie zwischen $\eta_0|_U$ und $\eta_1|_U$.

Damit sind i) und ii) gezeigt, woraus die Proposition folgt. (Die beiden letzten Sätze der Proposition sind klar, da $\mathbb{T}_G^X$ kofinal in $\mathbb{T}_G(X)$ ist.) ■

Der Beweis von Satz 2.10 ist hiermit abgeschlossen.

KAPITEL III. ÄQUIVARIANTE VERZWEIGUNGSTHEORIE

Wie schon am Ende des ersten Kapitels angekündigt, wollen wir nun Verzweigung von Nullstellen äquivarianter Abbildungen untersuchen und dazu die im Beweis des Verzweigungssatzes I.2.3 angewandten Methoden übertragen. Dieser Beweis war formal in dem Sinn, daß nur mit bekannten Eigenschaften von Homologietheorien gearbeitet wurde. In Kapitel II haben wir entsprechende Eigenschaften für eine äquivariante Homologietheorie, nämlich äquivariante stabile Homotopie ω_*^G , bereitgestellt. Folglich sollte sich Satz I.2.3 auf den äquivarianten Fall übertragen lassen. Dies ist im wesentlichen der Fall und wird in § 2 gezeigt. Als Einführung in die äquivariante Verzweigungstheorie werden wir in § 1 Verzweigung von einer 1-kodimensionalen Teilmenge des Parameterraums untersuchen. Diese Situation läßt sich vollständig auf den nichtäquivarianten Fall zurückführen. Wir erhalten dabei Verzweigungsmengen, die invariant sind bezüglich der Operation von Untergruppen von G . Hier läßt sich auch schon an einem sehr einfachen Beispiel deutlich machen, wie die zusätzliche Information "f äquivariant" ermöglicht, Verzweigung nachzuweisen.

Im gesamten Kapitel ist G eine beliebige kompakte Lie-Gruppe, falls keine Einschränkungen gemacht werden.

§ 1. Verzweigung von einer 1-kodimensionalen Teilmenge des Parameterraums

1.1 Beispiel: Sei $G = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, wobei G trivial auf $\mathbb{R}$ und durch Spiegelung am Ursprung auf $\mathbb{R}^2$ operiere, das heißt $-1 \cdot (v_1, v_2, v_3) = (v_1, -v_2, -v_3)$. Weiter sei $f: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ definiert durch

$$f(\lambda, v_1, v_2, v_3) := (\lambda v_1 + v_2^2, \lambda v_2 - v_1 v_3, v_3).$$

Offensichtlich ist f differenzierbar, $f(\mathbb{R} \times \{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \times \{(0, 0, 0)\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$.

Wir haben also Verzweigung bei $(0, 0)$. Dies folgt allerdings nicht aus Satz I.2.3 angewandt auf f , denn es gilt für alle $\lambda > 0$: $\text{sign det } D_v f(\lambda, 0) = 1 = \text{sign det } D_v f(-\lambda, 0)$.

Die Voraussetzung von Satz I.2.3 kann also nie erfüllt sein (vergleiche die Bemerkungen I.2.7b) und I.2.4e)).

Offensichtlich ist f äquivariant, was hier bedeutet:

$$f(\lambda, -1 \cdot v) = f(\lambda, v_1, -v_2, -v_3) = -1 \cdot f(\lambda, v).$$

Somit induziert f für alle $H < G$ Abbildungen $f^H: \mathbb{R} \times V^H \rightarrow V^H$.

Für $H = \{1\}$ ist f^H unser ursprüngliches f , für $H = G$ ist

$$V^G = \mathbb{R} \times \{(0, 0)\} \cong \mathbb{R} \text{ und } f^G: \mathbb{R} \times V^G \rightarrow V^G, (\lambda, v_1) \mapsto \lambda v_1.$$

Auf f^G läßt sich unser Verzweigungssatz offenbar anwenden, und wir erhalten eine globale Verzweigungsmenge $\mathcal{J}$ von Nullstellen von f^G und damit von f mit den Eigenschaften aus Kapitel I. ■

An diesem sehr einfachen Beispiel wird schon deutlich, wie die äquivariante Situation auf die nichtäquivariante zurückgeführt

werden kann. Man betrachtet alle abgeschlossenen Untergruppen H von G und wendet Satz I.2.3 auf die Abbildungen f^H an. Halten wir das förmlich fest.

1.2: Seien Λ, V G -Moduln und $O \subset \Lambda \times V$ eine invariante offene Teilmenge mit $(0,0) \in O, := O \cap (\Lambda \times \{0\})$. Λ ist hier also keine geschlossene Mannigfaltigkeit. Weiter sei $f: O \xrightarrow{G} V$ stetig und äquivariant mit den aus § I.1 bekannten Eigenschaften:

$$f|_{O_0} = 0,$$

ohne Einschränkungen sei $B_\Lambda \times B_V = \{(\lambda, v) \in \Lambda \times V: \|\lambda\|, \|v\| \leq 1\} \subset O$, f besitze keine nichttrivialen Nullstellen in einer (invarianten) Umgebung von $B_\Lambda - \{0\}$ in O und in

$$S_{\Lambda_0} \times (B_V - \{0\}) = \{(\lambda, v) \in \Lambda_0 \times V: \|\lambda\| = 1, 0 < \|v\| \leq 1\},$$

wobei $\Lambda_0 \subset \Lambda$ ein G -Untermodul von Λ sei.

f induziert für alle $H < G$ stetige Abbildungen

$$f^H: O^H \rightarrow V^H \text{ mit } f^H(S_{\Lambda_0}^H \times (B_V^H - \{0\})) \subset V^H - \{0\}.$$

Gibt es nun ein $H < G$ mit $l^H := \dim \Lambda_0^H \geq 1$, $n^H := \dim V^H \geq 1$ und eine (nichtäquivariante) zulässige Homologietheorie h_* (siehe Definition I.2.2), so daß f^H einen Homomorphismus

$$f_*^H: h_{(l^H + n^H - 2)}(S_{\Lambda_0}^H \times S_V^H) \rightarrow h_{(l^H + n^H - 2)}(V^H - \{0\})$$

induziert mit

$$f_*^H(\Sigma_{(l^H - 1)} \times \Sigma_{(n^H - 1)}) \neq 0,$$

so liefert Satz I.2.3 die Existenz von relativ abgeschlossenen Teilmengen

$$\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1 \subset (f^H)^{-1}(0) - O_0^H \subset \Lambda^H \times V^H,$$

die von Λ^H abzweigen mit all den in Kapitel I angegebenen Eigenschaften. Diese Verzweigungsmengen sind natürlich invariant unter der Operation von H . Ist Λ trivialer G -Modul, so sind die trivialen Lösungen $(\lambda, 0)$ invariant unter G . Die

abzweigenden Mengen besitzen also weniger Symmetrien, falls $H \neq G$. Man spricht bei diesem Phänomen von Symmetrieverlust ("symmetry breaking"). Da f äquivariant ist, sind auch $G \cdot \mathcal{Y}_2 \subseteq G \cdot \mathcal{Y}_1$, Mengen von nichttrivialen Nullstellen von f , die von Λ abzweigen. Es gilt: $NH \cdot \mathcal{Y}_2 \subset NH \cdot \mathcal{Y}_1 \subset \Lambda^H \times V^H$, NH der Normalisator von H in G . ■

Während wir bisher nur triviale Eigenschaften äquivarianter Abbildungen benutzten, wollen wir nun tieferliegende Ergebnisse des zweiten Kapitels anwenden, um zu sehen, daß im Fall $\Lambda_0 \cong \mathbb{R}$ mit trivialer G -Aktion keine weiteren Resultate erwartet werden können. Seien dazu $0 \in \Lambda \times V$, $f: 0 \xrightarrow{G} V$ wie in 1.2 mit $\Lambda_0 \cong \mathbb{R} \subset \Lambda^G$.

1.3 Satz: a) Falls eine abgeschlossene Untergruppe H von G existiert mit $\deg f_+^H \neq \deg f_-^H$, $f_+^H := f|_{\{+1\} \times S_V^H} \longrightarrow V^H - \{0\}$, $\{1, -1\} = S_{\Lambda_0}$, dann gibt es relativ abgeschlossene Teilmengen $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}_1 \subset (f^H)^{-1}(0) - 0_0^H$, die von 0_0^H abzweigen, mit den in Satz I.2.3 angegebenen Eigenschaften.

b) Falls für alle $H < G$ mit $|WH| = |NH/H| < \infty$ $\deg f_+^H = \deg f_-^H$ gilt, so gibt es einen G -Modul W und eine G -Abbildung $\tilde{f}: \Lambda \times V \times W \xrightarrow{G} V \times W$ mit $\tilde{f}|_{\{+1\} \times S_V} = f|_{\{+1\} \times S_V}$, $\deg \tilde{f}_+^H = \deg f_+^H$ [wobei $\tilde{f}_+^H = \tilde{f}|_{\{+1\} \times S_{V \times W}^H} \longrightarrow (V \times W)^H - \{0\}}$ und $\tilde{f}^{-1}(0) = \Lambda \times \{0\}$, also keine Verzweigung von Nullstellen von $\tilde{f}$.

Beweis: a) Nach Bemerkung I.2.7b) und Satz I.2.6 ist die Voraussetzung des Verzweigungsatzes I.2.3 erfüllt.

b) Sei $Sf_+: S^V \xrightarrow{G} \{+1\} \times S^V \xrightarrow{G} S^V$ definiert durch

$$Sf_+(0) := 0$$

$$Sf_+(\infty) := \infty$$

$$Sf_+(v) := \|v\| \cdot f(+1, v/\|v\|), \quad v \in V - \{0\}.$$

Es gilt:

$$Sf_+| \{1\} \times S_V = f| \{1\} \times S_V,$$

$$\forall H < G: \deg (Sf_+)^H = \deg f_+^H.$$

Die erste Aussage ist klar und die zweite eigentlich auch, denn $(Sf_+)^H$ ist im wesentlichen die unreduzierte Einhängung von f_+^H :

$\deg f_+^H$ ist definiert als der Abbildungsgrad der zu f_+^H homotopen Abbildung

$$\psi: S_V^H \cong \{1\} \times S_V^H \xrightarrow{f_+^H} V^H - \{0\} \cong S_V^H, \quad \psi(v) := f(1, v) / \|f(1, v)\|.$$

Sei $S\psi: S_V^H \rightarrow S_V^H$ die unreduzierte Einhängung von ψ , das heißt $S\psi(v) = \|v\| \cdot \psi(v/\|v\|)$ für $v \in V^H - \{0\}$, $S\psi(0) = 0$ sowie $S\psi(\infty) = \infty$. Dann ist $\deg \psi = \deg S\psi$. Nun ist aber $S\psi \simeq (Sf_+)^H$: Die lineare Homotopie $t \cdot S\psi + (1-t) \cdot S(f_+^H)$, wobei natürlich $t \cdot \infty + (1-t) \cdot \infty = \infty$ für alle t ist, leistet das Gewünschte. Somit

$$\deg f_+^H = \deg \psi = \deg S\psi = \deg (Sf_+)^H.$$

Ganz analog definieren wir $Sf_-: S_V \xrightarrow{G} \{-1\} \times S_V \xrightarrow{G} S_V$ mit

$$Sf_-| \{-1\} \times S_V = f| \{-1\} \times S_V \text{ und}$$

$$\forall H < G: \deg (Sf_-)^H = \deg f_-^H.$$

Sf_+ und Sf_- induzieren Elemente $[Sf_+]$, $[Sf_-]$ in $\omega_0^G(P)$.

Aus

$$\deg (Sf_+)^H = \deg f_+^H = \deg f_-^H = \deg (Sf_-)^H$$

für alle $H < G$ mit $|WH| < \infty$ folgt nach Satz II.1.14, daß

$$[Sf_+] = [Sf_-] \in \omega_0^G(P).$$

Somit gibt es einen G -Modul X mit

$$S^X(Sf_+) \xrightarrow{G} S^X(Sf_-): S^X S^V \xrightarrow{G} S^X S^V.$$

Diese Homotopie liefert eine Erweiterung

$$f': B_{\Lambda_0} \times S_{X \times V \times \mathbb{R}} \xrightarrow{G} [-1, 1] \times S^X S^V \xrightarrow{G} S^X S^V \xrightarrow{G} S_{X \times V \times \mathbb{R}}$$

von $S^X Sf_+ \cup S^X Sf_-: \{1, -1\} \times S^X S^V \xrightarrow{G} S^X S^V$.

In § I.1 haben wir ein solches f' stetig erweitert zu einer Abbildung

$$\tilde{f}: \Lambda \times X \times V \times \mathbb{R} \longrightarrow X \times V \times \mathbb{R} \text{ mit } \tilde{f}^{-1}(0) = \Lambda \times \{0\}.$$

Die dort angegebene Konstruktion liefert automatisch eine äquivariante Abbildung $\tilde{f}$, falls man mit einem äquivarianten f' startet, da G normerhaltend operiert. Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}|_{\{+1\} \times S_V} &= f'|_{\{+1\} \times S_V} = S f_+ \cup S f_-|_{\{+1\} \times S_V} = f|_{\{+1\} \times S_V}, \\ \deg \tilde{f}_+^H &= \deg [f'|_{\{+1\} \times S_{X \times V \times \mathbb{R}}}^H \longrightarrow (X \times V \times \mathbb{R})^H - \{0\}] = \\ &= \deg [(S^X S f_+)^H] = \deg [S^{X^H} (S f_+)^H] = \\ &= \deg (S f_+^+)^H = \deg f_+^H. \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \deg \tilde{f}_-^H = \deg f_-^H.$$

Nun setzen wir noch $W := X \times \mathbb{R}$ und erhalten das Gewünschte nach Umordnung der Koordinaten. ■

Satz 1.3b) kann noch etwas verschärft werden, falls G endlich und V so groß ist, daß $\omega_0^G(P) \cong [S_V, S_V]_G^*$. V heißt dann stabil; vergleiche Bemerkung II.1.15a). $\sigma \in \Lambda \times V$, $f: \sigma \xrightarrow{G} V$, $\Lambda_0 \xrightarrow{G} \mathbb{R} \subset \Lambda^G$ seien wie oben.

1.4 Satz: Sei G endlich und V stabiler G -Modul. Falls für alle

$H < G$: $\deg f_+^H = \deg f_-^H$, so gibt es eine stetige äquivariante Abbildung $\tilde{f}: \Lambda \times V \xrightarrow{G} V$ mit

$$\tilde{f}|_{S_{\Lambda_0} \times S_V} = f|_{S_{\Lambda_0} \times S_V} \text{ und } \tilde{f}^{-1}(0) = \Lambda \times \{0\}.$$

Beweis: Nach Bemerkung II.1.15a) folgt aus $\deg f_+^H = \deg f_-^H$ für alle $H < G$, daß

$$\begin{aligned} f_+: S_V &\xrightarrow{G} \{1\} \times S_V \xrightarrow{G} V - \{0\} \text{ und} \\ f_-: S_V &\xrightarrow{G} \{-1\} \times S_V \xrightarrow{G} V - \{0\} \end{aligned}$$

äquivariant homotop sind. Somit gibt es eine äquivariante Erweiterung $f': B_{\Lambda_0} \times S_V \xrightarrow{G} V - \{0\}$ von $f|_{S_{\Lambda_0} \times S_V}$. Daraus erhält man $\tilde{f}: \Lambda \times V \xrightarrow{G} V$ wie in § I.1. ■

1.5 Bemerkung: a) Die Sätze 1.3, 1.4 sagen aus, daß mit unseren topologischen Methoden Verzweigung von einer 1-kodimensionalen Teilmenge des Parameterraums nur nachgewiesen werden kann, wenn gilt: $\deg f_+^H \neq \deg f_-^H$ für ein $H < G$ mit $|WH| < \infty$. Ist G ein Torus, so ist die einzige abgeschlossene Untergruppe H von G mit $|WH| < \infty$ die ganze Gruppe G . Es gilt somit wie schon in II.1.15b) bemerkt

$$f_+^G \cong f_-^G \iff \deg f_+^G = \deg f_-^G \quad (\text{falls } |V^G| \geq 2).$$

Wenn wir also Verzweigung nachweisen können mit Hilfe des Abbildungsgrades, so erhalten wir automatisch Verzweigung von Fixpunkten der Operation.

b) Falls $D_v f(+1, 0)$ existiert und nicht singular ist, sieht man leicht, daß $D_v f(+1, 0) \in GL(V)^G$; ohne Einschränkungen sei $D_v f(1, 0) = \text{Id}$. Wir werden das in Lemma 2.3 zeigen. Dann sind aber auch alle $D_2 f^H(+1, 0)$ nicht singular, das heißt $D_2 f^H(+1, 0) \in GL(V^H)$, wobei $D_2 f^H$ die Ableitung von f^H nach der V^H -Komponente bedeutet; beachte $D_2 f^H = (D_v f)^H$. Es gilt: $\exists H < G: \deg f_+^H \neq \deg f_-^H \iff \exists H < G: J(\gamma^H) \neq 0$
 $\iff J_G(\gamma) \neq 0$.

Hier ist $\gamma \in \pi_0(GL(V)^G)$ von $D_v f$, $\gamma^H = E_*^H \gamma \in \pi_0(GL(n^H))$ von $D_2 f^H$ induziert, $n^H := \dim V^H$, und wir benutzen das Diagramm aus Bemerkung II.1.19b) sowie Satz II.1.14:

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_0(GL(V)^G) & \xrightarrow{J_G} & \tilde{\omega}_V^G(S^V) & & \\
 \downarrow \pi E^H_* & & \downarrow \pi R^H & \searrow \pi p^H & \\
 \pi \pi_0(GL(n^H)) & \xrightarrow{\pi J} & \pi \tilde{\omega}_{(n^H)}(S^{n^H}) & \xrightarrow{\cong} & \pi \mathbb{Z} \\
 (H) & & (H) & & (H)
 \end{array}$$

c) Seien $\sigma \in \Lambda \times V$ und $f: \sigma \xrightarrow{G} V$ wie in 1.2. Ist dann $\Lambda_0 \stackrel{G}{\cong} \mathbb{R}^1$ in Λ^G enthalten, $l \geq 1$, so kann man wie in b) schließen:

$$\exists H < G: J(\gamma^H) \neq 0 \Rightarrow J_G(\gamma) \neq 0, \text{ wobei}$$

$$J_G: \pi_{l-1}(GL(V)^G) \longrightarrow \tilde{\omega}_{l+V-1}^G(S^V) \text{ und}$$

$$J: \pi_{l-1}(GL(n^H)) \longrightarrow \tilde{\omega}_{l+(n^H)-1}(S^{n^H}).$$

Der umgekehrte Schluß ist im allgemeinen nicht richtig.

Ist $J(\gamma^H) \neq 0$ für ein $H < G$, so läßt sich Satz 1.2.3 auf f^H anwenden. Wir erhalten Verzweigung von Nullstellen, die unter H invariant sind (siehe 1.2). In § 2 werden wir Verzweigung nachweisen unter der Voraussetzung $J_G(\gamma) \neq 0$. Außerdem muß dort Λ_0 kein trivialer G -Modul sein. In dieser Situation lassen sich zwar nicht die Ergebnisse des ersten Kapitels anwenden, wohl aber können die Beweise geeignet modifiziert werden.

B.2. Der äquivariante Verzweigungssatz

In diesem Paragraphen wollen wir den Verzweigungssatz I.2.3 auf die äquivariante Situation übertragen. Wir behandeln aber nicht den allgemeinen Fall von Verzweigung in Vektorraumbündeln, da uns dazu vor allem eine äquivariante Form des Thom-Isomorphismus fehlt.

Sei also G wie immer eine kompakte Lie-Gruppe und Λ, V G -Moduln mit $|\Lambda^G| \geq 1$. Der Parameterraum wird also wieder mit Λ bezeichnet. Dieses Λ darf nicht mit dem Λ aus Kapitel I verwechselt werden, das ja eine geschlossene Mannigfaltigkeit war. Diesem entspricht hier die Ein-Punkt-Kompaktifizierung S^Λ . Weiter sei $O \subset \Lambda \times V$ eine invariante offene Teilmenge mit $(0,0) \in O_0 := O \cap (\Lambda \times \{0\})$ und $f: O \xrightarrow{G} V$ eine stetige äquivariante Abbildung mit $f|_{O_0} = 0$. Ohne Einschränkungen können wir annehmen, daß $B_\Lambda \times B_V \subset O$. Weiter gebe es einen G -Untermodul Λ_0 von Λ mit $|\Lambda_0^G| \geq 1$, etwa $\Lambda_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_1$, $\mathbb{R} \subset \Lambda_0^G$, so daß in einer Umgebung von $B_{\Lambda_0} - \{0\}$ in O nur triviale Nullstellen (das sind Elemente von O_0) liegen. Wieder können wir ohne Einschränkungen voraussetzen, daß

$$f(\lambda, v) \neq 0 \text{ für alle } (\lambda, v) \in S_{\Lambda_0} \times (B_V - \{0\}).$$

Wir erhalten somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_{\Lambda_0} \times S_V & \xrightarrow{i_1} & O - f^{-1}(0) \\ & \searrow f & \swarrow f \\ & & V - \{0\} \end{array}$$

Es ist klar, daß $f^{-1}(0)$ eine abgeschlossene und damit $O - f^{-1}(0)$ eine offene invariante Teilmenge von O ist. Überhaupt sind alle

in diesem Paragraphen vorkommenden Teilmengen von $\Lambda \times V$ invariant (vergleiche Bemerkung II.1.1b)).

Wie schon in Kapitel I betrachten wir zusätzlich die Einbettung

$$i_2: (B_{\Lambda_0} \times S_V, S_{\Lambda_0} \times S_V) \xrightarrow{G} (0-0_0, 0-f^{-1}(0)).$$

Wir erinnern daran, daß wir in Definition II.1.11 Elemente

$$\Sigma_{\Lambda_0-1} \in \tilde{\omega}_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \subset \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}),$$

$$\Delta_{\Lambda_0} \in \omega_{\Lambda_0}^G(B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \text{ und}$$

$$\Sigma_{V-1} \in \tilde{\omega}_{V-1}^G(S_V) \subset \omega_{V-1}^G(S_V)$$

bestimmen, die von der $1 \in \tilde{\omega}_0^G(S^0)$ kommen.

2.1 Satz: Falls für die von f induzierte Abbildung

$$f_*: \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(S_{\Lambda_0} \times S_V) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(V-\{0\})$$

$$\text{gilt:} \quad f_*(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0,$$

dann gibt es relativ abgeschlossene invariante Teilmengen

$\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ von $f^{-1}(0)-0_0$, $\mathcal{Y}_2 \stackrel{G}{\subset} \mathcal{Y}_1$, für die gilt:

$$i_1(\mathcal{Y}_1): S_{\Lambda_0} \times S_V \xrightarrow{G} 0-(\mathcal{Y}_1 \cup 0_0) \text{ und}$$

$$i_2(\mathcal{Y}_2): (B_{\Lambda_0} \times S_V, S_{\Lambda_0} \times S_V) \xrightarrow{G} (0-0_0, 0-(\mathcal{Y}_2 \cup 0_0))$$

induzieren auf ω_*^G -Niveau Homomorphismen mit

$$i_1(\mathcal{Y}_1)_*(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0 \text{ und } i_2(\mathcal{Y}_2)_*(\Delta_{\Lambda_0} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0.$$

$\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$ sind minimal bezüglich dieser Bedingungen. Insbesondere besitzen $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$ die folgenden Eigenschaften.

a) $(0,0) \in \bar{\mathcal{Y}}_2 \subset \bar{\mathcal{Y}}_1$

b) $\mathcal{Y}_2/G$ ist zusammenhängend

$\mathcal{Y}_1/G$ oder $(\mathcal{Y}_1 \cup \{c\})/G$ ist zusammenhängend, wobei $c \in 0$ kompaktifiziert. (G operiert trivial auf c ; $0 \cup \{c\}$ ist damit G -Raum.)

c) Für $i=1,2$ induziert die Einbettung

$$e_i: S_{\Lambda_0 \times V} \stackrel{G}{\cong} S := \text{rd}(B_{\Lambda_0} \times B_V) \xrightarrow{G} (\Lambda \times V - (\bar{\mathcal{Y}}_i - \mathcal{Y}_i), \Lambda \times V - \bar{\mathcal{Y}}_i)$$

einen Homomorphismus

$$e_{i*}: \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(S_{\Lambda_0 \times V}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(\Lambda \times V - (\bar{\mathcal{Y}}_i - \mathcal{Y}_i), \Lambda \times V - \bar{\mathcal{Y}}_i)$$

$$\text{mit } e_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0+V-1}) \neq 0.$$

Insbesondere gilt wenigstens eine der beiden folgenden Aussagen.

- i) $\mathcal{F}_i$ ist in keiner kompakten Teilmenge von $\mathcal{O}$ enthalten
 ii) Die Einbettung $d_i: S_{\Lambda_0} \hookrightarrow S^{\Lambda - \mathcal{F}_i}$, $\mathcal{F}_i := \bar{\mathcal{F}}_i \cap \mathcal{O}_0$, induziert einen Homomorphismus

$$d_{i*}: \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(S^{\Lambda - \mathcal{F}_i})$$

mit $d_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0$. Dies impliziert $\mathcal{F}_i \cap (\Lambda - B_{\Lambda_0}) \neq \emptyset$.

- d) Die Einbettungen

$$c_1: S_{\Lambda_0} \xhookrightarrow{G} \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_1 \text{ und}$$

$$c_2: (B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \xhookrightarrow{G} (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_2)$$

induzieren Homomorphismen

$$c_{1*}: \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(\mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_1) \text{ und}$$

$$c_{2*}: \omega_{\Lambda_0}^G(B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0}^G(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}_2)$$

mit $c_{1*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0$ und $c_{2*}(\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0$.

- e) $\bar{\mathcal{F}}_1 \cap \text{rd}(\mathcal{O}) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$

- f) $|V^G| \geq 1$, $\mathcal{O} \stackrel{G}{\cong} \Lambda \times V$, $\mathcal{O}_0 \stackrel{G}{\cong} \Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$

Es fehlt leider eine Aussage über die Dimension der Verzweigungsmengen. Hier können wir nur zeigen:

2.2 Satz: f erfülle die Voraussetzung von Satz 2.1. Falls Ver-

mutung II.2.9 richtig ist, was wir für G endlich zeigen konnten (Satz II.2.10), gilt für die nach Satz 2.1 existierenden Verzweigungsmengen $\mathcal{F}_i$, $i=1,2$

- a) $\dim_x \mathcal{F}_i/G \geq 1 + |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G|$ an jedem Punkt $x \in \mathcal{F}_i/G$

- b) Es gibt abgeschlossene invariante Teilmengen $\mathcal{F}'_i$ von $\mathcal{F}_i$ mit $\dim_\eta \mathcal{F}'_i/G \geq |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G|$ an jedem Punkt $\eta \in \mathcal{F}'_i/G$, so daß gilt:

Die Einbettungen

$$c'_1: S_{\Lambda_0} \xrightarrow{G} \mathcal{O}_0 - \mathfrak{F}'_1 \quad \text{und}$$

$$c'_2: (B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \xrightarrow{G} (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathfrak{F}'_2)$$

induzieren Homomorphismen

$$c'_{1*}: \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(\mathcal{O}_0 - \mathfrak{F}'_1) \quad \text{und}$$

$$c'_{2*}: \omega_{\Lambda_0}^G(B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0}^G(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathfrak{F}'_2)$$

$$\text{mit } c'_{1*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0 \quad \text{und} \quad c'_{2*}(\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0.$$

Die Beweise der Sätze 2.1 und 2.2 folgen im Anschluß an Bemerkung 2.5. Wie schon im ersten Kapitel wollen wir nun auch im äquivarianten Fall die Voraussetzung $f_*(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0$ für eine möglichst große Klasse von Abbildungen f nachweisen.

Sei dazu $f: \mathcal{O} \xrightarrow{G} V$ wie oben. Wir setzen zusätzlich voraus, daß f an den Stellen $\lambda \in S_{\Lambda_0}$ nach v differenzierbar ist und die Jacobimatrix $L(\lambda) := D_v f(\lambda, 0)$ nicht singular ist. Außerdem sei die Abbildung

$$L: S_{\Lambda_0} \longrightarrow GL(V), \quad \lambda \mapsto L(\lambda) = D_v f(\lambda, 0),$$

stetig.

2.3 Lemma: L ist äquivariant, wobei G auf $GL(V)$ wie in Definition II.1.16 angegeben operiert:

$$(gA)v := g(A(g^{-1}v)) \quad \text{für } g \in G, A \in GL(V), v \in V.$$

Für $\lambda \in S_{\Lambda_0}^G$ gilt insbesondere (siehe Proposition II.1.17):

$$L(\lambda) \in GL(V)^G = \{A \in GL(V): A \text{ ist äquivariant}\}.$$

Beweis: Wir haben für $\lambda \in S_{\Lambda_0}$ und $g \in G$ zu zeigen:

$$L(g\lambda) = gL(\lambda), \quad \text{das heißt } f(g\lambda, v) = (gL(\lambda))v + o(\|v\|), \quad \|v\| \rightarrow 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} f(g\lambda, v) - (gL(\lambda))v &= gf(\lambda, g^{-1}v) - g(L(\lambda)g^{-1}v) = \\ &= g[f(\lambda, g^{-1}v) - L(\lambda)g^{-1}v] = o(\|g^{-1}v\|) = \\ &= o(\|v\|), \end{aligned}$$

da G orthogonal und somit normerhaltend operiert. ■

Wegen $\Lambda_0 = \mathbb{R} \times \Lambda_1$, $\mathbb{R} \subset \Lambda_0^G$, können wir $\ast = (1, 0) \in \mathbb{R} \times \Lambda_1$ als Basispunkt von S_{Λ_0} wählen. Ohne Einschränkungen sei $L(\ast) = \text{Id}$, denn sonst ersetzen wir f durch $f' := L(\ast)^{-1} \circ f$. Wegen Lemma 2.3 ist $L(\ast)$ und somit f' äquivariant; $f'^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ ist ebenso klar wie

$$f_{\ast}(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0 \iff f'_{\ast}(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0.$$

$GL(V)$ sei also mit dem Basispunkt Id versehen. L induziert nun ein Element $\gamma \in [S_{\Lambda_0}, GL(V)]_G^{\ast} \cong \pi_{\Lambda_1}^G(GL(V))$. Sei

$$J_G: [S_{\Lambda_0}, GL(V)]_G^{\ast} \longrightarrow \tilde{\omega}_{\Lambda_0+V-1}^G(S^V) = \tilde{\omega}_{\Lambda_1+V}^G(S^V)$$

der äquivariante J -Homomorphismus aus II.1.18.

2.4 Satz: Falls $|V^G| \geq 1$, so gilt: $J_G(\gamma) \neq 0 \Rightarrow f_{\ast}(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0$.

Der Beweis von Satz 2.4 folgt im Anschluß an Proposition 2.16.

2.5 Bemerkung: a) Ist $|V^G| = 0$ aber $J_G(\gamma) \neq 0$, so erhält man trotzdem mit Hilfe eines kleinen Tricks Verzweigung von Nullstellen mit fast allen Eigenschaften von Satz 2.1. Wir führen das nach dem Beweis der Sätze 2.1, 2.2 und 2.4 am Ende des Paragraphen vor.

b) In Bemerkung II.1.19c) wurde angedeutet, daß der äquivariante J -Homomorphismus gegenwärtig ausführlich studiert wird in der algebraischen Topologie. Wegen Satz 2.4 wäre es wünschenswert, vor allem den Kern von J_G zu kennen. Es muß anderen Arbeiten vorbehalten bleiben, die schon vorhandenen Resultate auf unsere Form von J_G zu übertragen und auf Probleme der äquivarianten Verzweigungstheorie anzuwenden.

c) Globale Verzweigung von Nullstellen äquivarianter Abbildungen untersuchten unseres Wissens bisher nur Ize/Massabó/Vignoli [29], Theorem 4.2. Bei ihnen ist Λ ein trivialer G -Modul, V ein (eventuell unendlichdimensionaler)

Banachraum mit linearer normerhaltender Operation von G . f muß auf ganz $\Lambda \times V$ definiert sein. Sie verallgemeinern dabei den von ihnen und Pejsachowicz in [28] eingeführten Begriff "0-epi" auf die äquivalente Situation und formulieren damit eine Voraussetzung an die Abbildung f , aus der die Existenz einer Menge Σ von Nullstellen von f folgt, die von $\Lambda \times \{0\}$ abzweigt und ganz in $\Lambda \times (V - V^G)$ liegt. Σ/G ist zusammenhängend und erfüllt eine schwächere Form von 2.1c) sowie 2.2a). Ihre Voraussetzungen und Methoden sind völlig verschieden von denen unserer Arbeit.

Wir kommen nun zum Beweis der Sätze 2.1, 2.2 und 2.4. Große Teile des Beweises lassen sich nahezu wörtlich aus § 1.3 übernehmen. Wir werden daher oft nur die entsprechenden Referenzen angeben.

2.6 Konstruktion der Mengen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$: Für relativ abgeschlossene invariante Teilmengen $\mathcal{F}$ von $f^{-1}(0) - \mathcal{O}_0$ seien

$$i_1(\mathcal{F}): S_{\Lambda_0} \times S_V \xrightarrow{G} \mathcal{O} - (\mathcal{F} \cup \mathcal{O}_0),$$

$$i_2(\mathcal{F}): (B_{\Lambda_0} \times S_V, S_{\Lambda_0} \times S_V) \xrightarrow{G} (\mathcal{O} - \mathcal{O}_0, \mathcal{O} - (\mathcal{F} \cup \mathcal{O}_0))$$

die Einbettungen; $i_1 = i_1(f^{-1}(0) - \mathcal{O}_0)$.

Wir betrachten das kommutative Dreieck

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1} \in \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(S_{\Lambda_0} \times S_V) & \xrightarrow{i_1, *}& \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(\mathcal{O} - f^{-1}(0)) \\ & \searrow f_* & \swarrow f_* \\ & \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(V - \{0\}) & \end{array}$$

Wegen $f_*(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0$ gilt $i_{,*}(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0$. Also ist die Menge

$$M_1 := \{\mathcal{Y} \subseteq f^{-1}(0) - O_0 : \mathcal{Y} \text{ abgeschlossen in } f^{-1}(0) - O_0,$$

$$i_*(\mathcal{Y})_*(\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0\}$$

nicht leer: $f^{-1}(0) - O_0 \in M_1$.

Mit Hilfe von Satz II.2.7 zeigt man nun wie in Lemma I.3.1, daß M_1 ein bezüglich " $\subset$ " minimales Element $\mathcal{Y}_1$ enthält.

Ebenso zeigt man wie in § I.3, daß die Menge

$$M_2 := \{\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}_1 : \mathcal{Y} \text{ abgeschlossen in } \mathcal{Y}_1, i_2(\mathcal{Y})_*(\Delta_{\Lambda_0} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0\}$$

nicht leer ist ($\mathcal{Y}_1 \in M_1$) und ein bezüglich " $\subset$ " minimales Element $\mathcal{Y}_2$ enthält. ■

2.7 Lemma: Sei $A \subseteq \Lambda \times V$ mit $\bar{A} \cap (S_{\Lambda_0} \times B_V \cup B_{\Lambda_0} \times \{0\}) = \emptyset$. Dann induziert die Einbettung

$$i: (B_{\Lambda_0} \times S_V, S_{\Lambda_0} \times S_V) \xhookrightarrow{G} (B_{\Lambda_0} \times (B_V - \{0\}), B_{\Lambda_0} \times (B_V - \{0\}) - A)$$

auf ω_*^G -Niveau einen Homomorphismus i_* mit $i_* = 0$.

Beweis: Wie der von Lemma I.3.2. Alle dort auftauchenden Mengen und Abbildungen sind automatisch invariant beziehungsweise äquivariant, also Objekte beziehungsweise Morphismen in $GTOT^2$. ■

2.8 Proposition: $(0,0) \in \bar{\mathcal{Y}}_2 \subset \bar{\mathcal{Y}}_1$.

Beweis: Wie der von Proposition I.3.3. ■

2.9 Proposition: a) $\mathcal{Y}_2/G$ ist zusammenhängend

b) $\mathcal{Y}_1/G$ oder $(\mathcal{Y}_1 \cup \{c\})/G$ ist zusammenhängend, wobei $c \in O$ kompaktifiziert.

Beweis: a) Annahme: $\mathcal{F}_2/G$ ist nicht zusammenhängend.

Dann existieren $\emptyset \neq \mathcal{F}_0, \mathcal{F}'_0 \subset \mathcal{F}_2/G$ mit $\mathcal{F}_2/G = \mathcal{F}_0 \sqcup \mathcal{F}'_0$.

Ist $p: \mathcal{F}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{F}_2/G$ die kanonische Projektion, so gilt für $\mathcal{F} := p^{-1}(\mathcal{F}_0)$, $\mathcal{F}' := p^{-1}(\mathcal{F}'_0) \subseteq \mathcal{F}_2$:

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \sqcup \mathcal{F}' \quad (\text{in } G\mathcal{F}\mathcal{F}), \quad \mathcal{F} \neq \emptyset \neq \mathcal{F}'.$$

Jetzt wird wie in Proposition I.3.4 gezeigt, daß $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2$, oder $\mathcal{F}' \in \mathcal{M}_2$, folgt - im Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{F}_2$. Einziger Unterschied zur nicht-äquivarianten Situation ist hier nur die Zerlegung von $\mathcal{F}_2$ in invariante Teilmengen.

b) Ist $\bar{\mathcal{F}}, \text{Ord}(\mathcal{O}) = \emptyset$, so zeigen wir in Proposition 2.13, daß $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ gilt, $\mathcal{F}_1/G$ also zusammenhängend ist nach Teil a). Sei jetzt $\bar{\mathcal{F}}, \text{Ord}(\mathcal{O}) \neq \emptyset$. Wir zeigen indirekt, daß dann $(\mathcal{F}_1 \cup \{c\})/G$ zusammenhängend ist.

Annahme: $(\mathcal{F}_1 \cup \{c\})/G = \mathcal{F} \sqcup \mathcal{F}'$, $\mathcal{F} \neq \emptyset \neq \mathcal{F}'$

Man bestätigt ohne Schwierigkeiten, daß $\mathcal{F}_1 \cup \{c\}$ G -homöomorph zu $(\mathcal{F}_1 \cup c^+\mathcal{O})/c^+\mathcal{O}$ ist, $c^+\mathcal{O} := S^{\Lambda \times V} - \mathcal{O}$. Seien

$$\mathcal{F}_1 \cup c^+\mathcal{O} \xrightarrow{p} \mathcal{F}_1 \cup \{c\} \xrightarrow{q} (\mathcal{F}_1 \cup \{c\})/G$$

die kanonischen Projektionen. Wir setzen

$$\mathcal{F} := (q \circ p)^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}_1 \cup c^+\mathcal{O} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{F}' := (q \circ p)^{-1}(\mathcal{F}') \subseteq \mathcal{F}_1 \cup c^+\mathcal{O}.$$

Der Beweis wird nun wie der von Proposition I.3.4 zu Ende geführt. ■

Zum Beweis von Satz 2.1c) zeigen wir die folgende etwas stärkere Aussage. Für $i=1,2$ sei dazu $\bar{\mathcal{F}}_i^+$ der Abschluß von $\mathcal{F}_i$ in $S^{\Lambda \times V}$.

2.10 Proposition: Für $i=1,2$ induzieren die Einbettungen

$$\begin{aligned} e_i: S_{\Lambda_0 \times V} &\xrightarrow{G} S := \text{rd}(B_{\Lambda_0} \times B_V) \xrightarrow{G} (\Lambda \times V - (\bar{\mathcal{F}}_i - \mathcal{F}_i), \Lambda \times V - \bar{\mathcal{F}}_i), \\ e_i': (\Lambda \times V - (\bar{\mathcal{F}}_i - \mathcal{F}_i), \Lambda \times V - \bar{\mathcal{F}}_i) &\xrightarrow{G} (S^{\Lambda \times V} - (\bar{\mathcal{F}}_i^+ - \mathcal{F}_i), S^{\Lambda \times V} - \bar{\mathcal{F}}_i^+) \end{aligned}$$

einen Homomorphismus

$$(e'_* \circ e_*)_*: \omega_{\Lambda_0 + V - 1}^G(S_{\Lambda_0 \times V}) \rightarrow \omega_{\Lambda_0 + V - 1}^G(S^{\Lambda \times V} - (\bar{\gamma}_i^+ - \gamma_i^-), S^{\Lambda \times V} - \bar{\gamma}_i^+)$$

mit $(e'_* \circ e_*)_*(\Sigma_{\Lambda_0 + V - 1}) \neq 0$.

Dann gilt natürlich erst recht $e_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0 + V - 1}) \neq 0$.

Beweis: Wie der von Proposition I.3.6, wobei die Proposition A.1.2i) entsprechende Aussage in II.1.13i) gezeigt wurde. ■

2.11 Korollar: Es gilt wenigstens eine der beiden folgenden Aussagen ($i=1,2$).

- i) γ_i ist in keiner kompakten Teilmenge von O enthalten
- ii) Die Einbettung $d_i: S_{\Lambda_0} \hookrightarrow S^{\Lambda - \gamma_i}$, $\gamma_i := \bar{\gamma}_i \cap O_0$, induziert einen Homomorphismus

$$d_{i*}: \omega_{\Lambda_0 - 1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0 - 1}^G(S^{\Lambda - \gamma_i})$$

mit $d_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0 - 1}) \neq 0$. Insbesondere ist $\gamma_i \cap (\Lambda - B_{\Lambda_0}) \neq \emptyset$.

Beweis: Der Beweis von Korollar I.3.7 läßt sich problemlos auf die äquivariante Situation übertragen. Für die Implikation

$$d_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0 - 1}) \neq 0 \Rightarrow \gamma_i \cap (\Lambda - B_{\Lambda_0}) \neq \emptyset$$

können wir hier einen kurzen elementaren Beweis angeben.

Aus $\gamma_i \cap (\Lambda - B_{\Lambda_0}) = \emptyset$ folgt nämlich $\gamma_i = \{0\}$; und S_{Λ_0} läßt sich in $S^{\Lambda - \gamma_i} = S^{\Lambda - \{0\}}$ zu einem Punkt zusammenziehen, woraus der Widerspruch $d_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0 - 1}) = 0$ folgt. ■

2.12 Proposition: Die Einbettungen

$$c_1: S_{\Lambda_0} \xhookrightarrow{G} O_0 - \gamma_1, \text{ und}$$

$$c_2: (B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \xhookrightarrow{G} (O_0, O_0 - \gamma_2)$$

induzieren Homomorphismen

$$c_{1*}: \omega_{\Lambda_0 - 1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0 - 1}^G(O_0 - \gamma_1) \text{ und}$$

$$c_{2*}: \omega_{\Lambda_0}^G(B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0}^G(O_0, O_0 - \gamma_2)$$

mit $c_{1*}(\Sigma_{\Lambda_0 - 1}) \neq 0$ und $c_{2*}(\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0$.

Beweis: a) $\iota=1$

Sei $\varphi: \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi(\lambda) := \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(\{\lambda\}, \bar{\mathcal{T}}_1, \text{Urd}(\mathcal{O}))$.

φ ist eine stetige invariante Abbildung und folglich ist

$$X := \{(\lambda, v) \in \mathcal{O} : \lambda \in \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}_1, \|v\| = \varphi(\lambda)\}$$

eine invariante Teilmenge von $\mathcal{O}$. Es gilt offenbar:

$$(\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}_1) \times S_V \xrightarrow{G} X, (\lambda, v) \mapsto (\lambda, \varphi(\lambda) \cdot v).$$

Die Behauptung folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\Lambda_0-1} \bullet \Sigma_{V-1} \in \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \bullet \omega_{V-1}^G(S_V) & \xrightarrow{c_1 \star \text{id}} & \omega_{\Lambda_0-1}^G(\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}_1) \bullet \omega_{V-1}^G(S_V) \\ \downarrow & & \downarrow \times \\ \Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1} \in \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(S_{\Lambda_0} \times S_V) & \xrightarrow{(c_1, \text{id}) \star} & \omega_{\Lambda_0+V-2}^G((\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}_1) \times S_V) \\ \downarrow i_1(\mathcal{T}_1) \star & & \downarrow \cong \\ \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(\mathcal{O}_0 - (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{O}_0)) & \xleftarrow{\quad} & \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(X) \end{array}$$

und der Tatsache $i_1(\mathcal{T}_1) \star (\Sigma_{\Lambda_0-1} \times \Sigma_{V-1}) \neq 0$. Dabei ist der unterste Homomorphismus von der entsprechenden Einbettung induziert; das untere Quadrat kommutiert, da es auf GTOF-Niveau bis auf G-Homotopie kommutiert.

b) $\iota=2$

Wie in Proposition I.3.8 genügt es zu zeigen:

Für alle abgeschlossenen invarianten Umgebungen U von $\mathcal{T}_2$ in $\mathcal{O}_0$ mit $U \xrightarrow{G} \mathcal{O} - S_{\Lambda_0}$ gilt

$$c_2(U) \star (\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0,$$

wobei $c_2(U): (B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \xrightarrow{G} (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - U)$.

Denn nach Satz II.2.7 gilt:

$$\omega_{\Lambda_0}^G(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}_2) \cong \text{colim}_U \omega_{\Lambda_0}^G(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - U).$$

Sei also U eine solche Umgebung. Wir setzen

$$\varphi'_U: \mathcal{O}_0 - \emptyset \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \varphi'_U(\lambda) := \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(\{\lambda\}, \bar{\mathcal{T}}_2 \text{Urd}(\mathcal{O})).$$

φ'_U ist eine stetige invariante Funktion. Nach Satz II.2.1 von Tietze-Gleason (beachte $\mathbb{R}^+ \stackrel{G}{\cong} \mathbb{R}$) existiert eine stetige invariante Erweiterung $\varphi_U: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ von φ'_U , von der wir ohne Einschränkungen voraussetzen dürfen, daß $\varphi_U(\lambda) < \text{dist}(\{\lambda\}, \text{rd}(\mathcal{O}))$. Seien

$$X_U := \{(\lambda, v) \in \mathcal{O}: \lambda \in \mathcal{O}_0 - U, \|v\| = \varphi_U(\lambda)\} \text{ und}$$

$$Y_U := \{(\lambda, v) \in \mathcal{O}: \lambda \in \mathcal{O}_0, \|v\| = \varphi_U(\lambda)\}.$$

Es gilt: $(\mathcal{O}_0 \times S_V, (\mathcal{O}_0 - U) \times S_V) \stackrel{G}{\cong} (Y_U, X_U)$

und die Behauptung folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\Lambda_0} \otimes \Sigma_{V-1} \in \omega_{\Lambda_0}^G(B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \otimes \omega_{V-1}^G(S_V) & \xrightarrow{c_2(U)_* \otimes \text{id}} & \omega_{\Lambda_0}^G(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - U) \otimes \omega_{V-1}^G(S_V) \\ \downarrow & \searrow \times & \downarrow \times \\ \Delta_{\Lambda_0} \times \Sigma_{V-1} \in \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(B_{\Lambda_0} \times S_V, S_{\Lambda_0} \times S_V) & \longrightarrow & \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(\mathcal{O}_0 \times S_V, (\mathcal{O}_0 - U) \times S_V) \\ \downarrow i_2(\mathcal{T}_2)_* & & \downarrow \cong \\ \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(\mathcal{O} - \mathcal{O}_0, \mathcal{O} - (\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{O}_0)) & \longleftarrow & \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(Y_U, X_U) \end{array}$$

sowie der Tatsache, daß $i_2(\mathcal{T}_2)_*(\Delta_{\Lambda_0} \times \Sigma_{V-1}) \neq \emptyset$. ■

2.13 Proposition: $\bar{\mathcal{T}}_2 \cap \text{rd}(\mathcal{O}) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$

Beweis: Wie der von Proposition I.4.3. Man muß nur etwas anpassen beim Beweis der Injektivität von

$$\partial_2: \omega_{\Lambda_0+V-1}^G(\Lambda \times (V - \{0\}), \Lambda \times V - (\mathcal{T}_2 \cup \Lambda)) \rightarrow \omega_{\Lambda_0+V-2}^G(\Lambda \times V - (\mathcal{T}_2 \cup \Lambda)).$$

Hier ist $\{*\} \times S_V \subset \Lambda \times V - (\mathcal{T}_2 \cup \Lambda)$, $* \in S_{\Lambda_0}^G$ Basispunkt, eine invariante Teilmenge von $\Lambda \times V$ und es gilt:

$$\Lambda \times (V - \{0\}) \stackrel{G}{\cong} \{*\} \times S_V.$$

Die Injektivität von ∂_2 folgt nun aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 \omega_{\Lambda_0 + V - 1}^G(\Lambda \times (V - \{0\})) & \rightarrow & \omega_{\Lambda_0 + V - 1}^G(\Lambda \times (V - \{0\}), \Lambda \times V - (\mathfrak{F}_2 \cup \Lambda)) \xrightarrow{\partial_2} \dots \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \omega_{\Lambda_0 + V - 1}^G(\Lambda \times (V - \{0\}), \{*\} \times S_V) \cong \{0\} &
 \end{array}$$

2.14 Proposition: $|V^G| \geq 1$, $\sigma \stackrel{G}{\cong} \Lambda \times V$, $\sigma_0 \stackrel{G}{\cong} \Lambda \Rightarrow \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$

Beweis: Wie der von Proposition I.3.11. Hier benötigt man ebenfalls einen Punkt $* \in S_{\Lambda_0}^G$, sowie einen Punkt in $(\sigma - (\mathfrak{F}_2 \cup \sigma_0))^G$; beide Punkte existieren wegen $|\Lambda_0^G|, |V^G| \geq 1$. ■

Damit ist Satz 2.1 vollständig bewiesen, und wir kommen zum Beweis von Satz 2.2.

2.15 Proposition: Falls Vermutung II.2.9 richtig ist, gilt für

$$i=1,2: \dim_x \mathfrak{F}_i/G \geq 1 + |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G| \quad \text{an jedem Punkt } x \in \mathfrak{F}_i/G.$$

Beweis: Der Beweis verläuft wie der von Proposition I.3.5. Nur bei den Definitionen am Anfang muß die Äquivarianz berücksichtigt werden.

$$\text{Sei } k := |\Lambda^G|, \quad l := |\Lambda_0^G|.$$

Annahme: Es gibt $x \in \mathfrak{F}_i/G$ und beliebig kleine Umgebungen U'_i von x in $\mathfrak{F}_i/G$ mit $\dim \text{rd}(U'_i) \leq k-l-1$ (das heißt $\dim_x \mathfrak{F}_i/G \leq k-l = |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G|$).

Ist U'_i eine solche ohne Einschränkungen kompakte Umgebung von x in $\mathfrak{F}_i/G$, so sei $U_i := p^{-1}(U'_i)$, $p: \mathfrak{F}_i \rightarrow \mathfrak{F}_i/G$, die U'_i entsprechende invariante Teilmenge von $\mathfrak{F}_i$. U_i ist ebenfalls kompakt und es gilt $(\text{rd}(U_i))/G = \text{rd}(U'_i)$ (siehe Bemerkung

II.1.1e)). Nun wird der Beweis wie in I.3.5 geführt (wobei natürlich h_* durch ω_*^G zu ersetzen ist und E durch $\Lambda \times V$ sowie E^+ durch $S^{\Lambda \times V}$) - bis auf die Stellen, wo

$$\begin{aligned}\omega_{\Lambda_0 + V}^G(\Lambda \times V, \Lambda \times V - \text{rd}(U_1)) &\cong \bar{\omega}_G^{\Lambda - \Lambda_0}(\{\infty\} \text{Urd}(U_1), \{\infty\}) \\ &\cong \bar{\omega}_G^{\Lambda - \Lambda_0}(\text{rd}(U_1)) \cong \{0\}\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\omega_{\Lambda_0 + V}^G(S^{\Lambda \times V}, S^{\Lambda \times V} - \text{rd}(U_2)) \cong \bar{\omega}_G^{\Lambda - \Lambda_0}(\text{rd}(U_2)) \cong \{0\}$$

zu zeigen ist. Hier gilt $\bar{\omega}_G^{\Lambda - \Lambda_0}(\text{rd}(U_i)) \cong \{0\}$ nach Vermutung II.2.9, weil (mit $\Lambda \cong \Lambda_0 \times \Lambda_1$, $\Lambda_1 \cong \Lambda - \Lambda_0$)

$$\begin{aligned}\text{FPdim } (\Lambda - \Lambda_0) &= \text{FPdim } \Lambda_1 = |\Lambda_1^G| = |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G| = k-1 > \\ &> \dim \text{rd}(U'_i) = \dim (\text{rd}(U_i))/G\end{aligned}$$

nach Annahme. Dies führt wie in I.3.5 zu $\mathcal{F}_i - \bar{U}_i \in \mathcal{M}_i$, was wegen $\mathcal{F}_i - \bar{U}_i \subset \mathcal{F}_i$ der Minimalität von $\mathcal{F}_i$ widerspricht. ■

Der nun folgende Beweis von Satz 2.2b) geht zwar auch analog zu dem von Satz I.2.3e) $\hat{=}$ Proposition I.3.8, doch beschränken sich die Änderungen hier nicht auf das Ersetzen der dortigen Begriffe durch ihre äquivarianten Analoga und auf das Überprüfen, ob alle beteiligten Mengen und Abbildungen in der äquivarianten Kategorie liegen. Die nötigen Modifikationen werden wir deshalb ausführlich darstellen.

2.16 Proposition: Falls Vermutung II.2.9 richtig ist, gibt es abgeschlossene invariante Teilmengen $\mathcal{F}'_i$ von $\mathcal{F}_i = \bar{\mathcal{F}}_i \cap \mathcal{O}_0$ mit

$$\dim_{\eta} \mathcal{F}'_i/G \geq |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G| \quad \text{an jedem Punkt } \eta \in \mathcal{F}'_i/G,$$

so daß gilt:

Die Einbettungen

$$\begin{aligned}c'_1: S_{\Lambda_0} &\xrightarrow{G} \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_1 \quad \text{und} \\ c'_2: (B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) &\xrightarrow{G} (\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{F}'_2)\end{aligned}$$

induzieren Homomorphismen

$$c'_{1*}: \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}'_1) \quad \text{und}$$

$$c'_{2*}: \omega_{\Lambda_0}^G(B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0}^G(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}'_2)$$

mit $c'_{1*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0$ und $c'_{2*}(\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0$.

Beweis: Falls $k := |\Lambda^G| = |\Lambda_0^G| = 1$, können wir $\mathcal{T}'_i := \mathcal{T}_i$ setzen, da dann die Dimensionsaussage trivial ist. Deshalb sei im folgenden $k > 1$. Außerdem sei $\Lambda \stackrel{G}{\cong} \Lambda_0 \times \Lambda_1$, also $|\Lambda_1^G| = |\Lambda^G| - |\Lambda_0^G| = k-1 > 0$.

a) $i=1$

Wir setzen für $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_1$

$$c_1(\mathcal{T}): S_{\Lambda_0} \xrightarrow{G} \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}$$

und betrachten die Menge

$$M_1 := \{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_1: \mathcal{T} \text{ abgeschlossen in } \mathcal{T}_1, c_1(\mathcal{T})_*(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0\}.$$

Nach Proposition 2.12 ist $\mathcal{T}_1 \in M_1$ und wie üblich zeigt man die Existenz eines bezüglich " $<$ " minimalen Elements $\mathcal{T}'_1$ von M_1 , wobei die beteiligten Mengen $\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}$ als offene G -Teilmengen von S^Λ aufgefaßt werden, weshalb Satz II.2.7 angewandt werden kann. Sei

$$c'_1 := c_1(\mathcal{T}'_1): S_{\Lambda_0} \xrightarrow{G} \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}'_1.$$

Wir haben zu zeigen:

$$\dim_{\eta} \mathcal{T}'_1/G \geq k-1 \quad \text{an jedem Punkt } \eta \in \mathcal{T}'_1/G.$$

Dies wird indirekt bewiesen.

Annahme: Es gibt $\eta \in \mathcal{T}'_1/G$ und beliebig kleine Umgebungen

$$U' \text{ von } \eta \text{ in } \mathcal{T}'_1/G \text{ mit } \dim \text{rd}(U') \leq k-1-2.$$

Um das zu einem Widerspruch zu führen, unterscheiden wir wie im Beweis von Proposition I.3.8 zwei Fälle.

1. Fall: $\{\eta\} \subset \mathcal{T}'_1/G$ ist offen.

Sei $G\lambda \in \mathcal{T}'_1$ der η entsprechende Orbit, das heißt

$\lambda \in p^{-1}(\eta)$, $p: \mathcal{T}'_1 \longrightarrow \mathcal{T}'_1/G$. Dann ist $G\lambda \in \mathcal{T}'_1$ offen, also $\mathcal{T}'_1 - G\lambda \in \mathcal{T}'_1$ abgeschlossen.

Behauptung: $\mathcal{T} := \mathcal{T}'_1 - G\lambda \in M_1$, was ein Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{T}'_1$ ist.

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition I.3.8 betrachten wir die Mayer-Vietoris-Sequenz der Triade $(\Lambda; \mathcal{O}_0 - \mathcal{T}, \Lambda - G\lambda)$ und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda) & \xrightarrow{\Delta} & \omega_{\Lambda_0-1}^G(\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}'_1) & \longrightarrow & \omega_{\Lambda_0-1}^G(\mathcal{O}_0 - \mathcal{T}) \oplus \omega_{\Lambda_0-1}^G(\Lambda - G\lambda) \\
 & & \uparrow c'_{i_*} & \nearrow c_*(\mathcal{T})_* \oplus i_* & \\
 & & \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) & &
 \end{array}$$

Nun folgt $\mathcal{T} \in M_1$ aus $\Delta=0$ und $i_*(\Sigma_{\Lambda_0-1})=0$.

Zu $\Delta=0$: Δ faktorisiert über

$$\omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda, \Lambda - G\lambda) \cong \bar{\omega}_G^{\Lambda - \Lambda_0}(G\lambda \cup \{\infty\}, \{\infty\}) \cong \bar{\omega}_G^{\Lambda - \Lambda_0}(G\lambda) \stackrel{*}{\cong} \{0\}.$$

* gilt, da $\dim(G\lambda)/G = \dim\{\eta\} = 0$ und

$$\text{FPdim}(\Lambda - \Lambda_0) = k-1 > 0.$$

Zu $i_*(\Sigma_{\Lambda_0-1})=0$: Ist $G\lambda \neq \{0\}$, so faktorisiert i_* über

$$\omega_{\Lambda_0-1}^G(B_{\Lambda_0}) \cong \omega_{\Lambda_0-1}^G(P), \text{ und } \Sigma_{\Lambda_0-1} \text{ liegt ja im Kern von } \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(P).$$

Falls $G\lambda = \{0\}$, so faktorisiert i_* über $\omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda})$, und S_{Λ_0} läßt sich in S_{Λ} äquivariant zu einem Punkt in $S_{\Lambda_1}^G$ deformieren.

2. Fall: $\{\eta\} \subset \mathcal{T}'_1/G$ ist nicht offen.

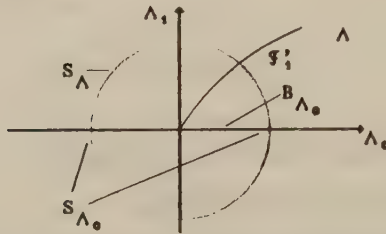
Dann wählen wir ein U' wie in der Annahme, das ohne Einschränkungen kompakt ist. Außerdem sei U' so klein, daß $U := p^{-1}(U')$ in einer Tubenumgebung von $G\lambda$ enthalten ist. Genauer soll das heißen:

Es gibt eine G -Einbettung (Tube)

$$\varphi: G \times_H K_\epsilon = (G \times K_\epsilon) / H \xrightarrow{G} \Lambda$$

mit $H := G_\lambda = \{g \in G: g\lambda = \lambda\} < G$, K_ϵ die offene ϵ -Kugel um 0 in einem geeigneten H -Modul W , $\varphi(G \times_H \{0\}) = G\lambda$; siehe Bredon [10], II.5.1, 5.2. U' sei so klein gewählt, daß $U \subseteq \varphi(G \times_H K_{\epsilon/2})$; außerdem gelte

$$U \cap B_{\Lambda_0} \neq \emptyset \Rightarrow U \subseteq \Lambda - S_{\Lambda_0}.$$



Dann ist erst einmal $G\lambda \subseteq \bar{U}$ und $\mathcal{F} := (\mathcal{F}'_1 - \bar{U}) \cup G\lambda \subseteq \mathcal{F}'_1$ abgeschlossen. Die Triade $(\Lambda - (G\lambda \text{Urd}(U)); \sigma_0 - \mathcal{F}, \Lambda - U)$ liefert wieder eine exakte Mayer-Vietoris-Sequenz.

$$\begin{array}{ccc} \omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda - (G\lambda \text{Urd}(U))) & \xrightarrow{\Delta} & \omega_{\Lambda_0-1}^G(\sigma_0 - \mathcal{F}'_1) \rightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(\sigma_0 - \mathcal{F}) \oplus \omega_{\Lambda_0-1}^G(\Lambda - U) \\ & & \uparrow c'_{1*} \nearrow c_1(\mathcal{F})_* \oplus i_* \\ & & \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \end{array}$$

Wieder ist zu zeigen: $\Delta=0$ und $i_*(\Sigma_{\Lambda_0})=0$, um $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_1$ und damit den gewünschten Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{F}'_1$ zu erhalten.

Zu $\Delta=0$:

Hier benötigen wir eine offene invariante Umgebung $\bar{U}$ von $G\lambda$ mit $U \subseteq \bar{U}$, so daß $\Lambda - \bar{U}$ äquivarianter starker

Deformationsretrakt von $\Lambda\text{-}G\lambda$ ist. Denn dann gilt (alle Abbildungen bis auf Δ und ∂ sind von entsprechenden Einbettungen induziert):

$$\begin{array}{ccccc}
 \{0\} \cong \omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda\text{-}G\lambda, \Lambda\text{-}\bar{U}) & \xleftarrow{\quad} & \omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda\text{-}(G\lambda\text{Urd}(U))) & \xrightarrow{\Delta} & \omega_{\Lambda_0-1}^G(\sigma_0\text{-}\mathfrak{T}_1') \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha & & \uparrow \partial \\
 \omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda\text{-}G\lambda, \Lambda\text{-}U) & \xrightarrow{\beta} & \omega_{\Lambda_0}^G(\Lambda\text{-}(G\lambda\text{Urd}(U)), \Lambda\text{-}U) & \cong & \omega_{\Lambda_0}^G(\sigma_0\text{-}\mathfrak{T}, \sigma_0\text{-}\mathfrak{T}_1')
 \end{array}$$

β ist injektiv [betrachte die lange exakte Sequenz des Tripels $(\Lambda\text{-}G\lambda, \Lambda\text{-}(G\lambda\text{Urd}(U)), \Lambda\text{-}U)$], da

$$\begin{aligned}
 \omega_{\Lambda_0+1}^G(\Lambda\text{-}G\lambda, \Lambda\text{-}(G\lambda\text{Urd}(U))) &\cong \\
 &\cong \omega_G^{\Lambda\text{-}\Lambda_0-1}(G\lambda\text{Urd}(U)U\{\infty\}, G\lambda U\{\infty\}) \\
 &\cong \omega_G^{\Lambda\text{-}\Lambda_0-1}(\text{rd}(U)) \cong \{0\},
 \end{aligned}$$

denn

$$\text{FPdim}(\Lambda\text{-}\Lambda_0-1) = k-1-1 > \dim \text{rd}(U') = \dim(\text{rd}(U))/G.$$

Hier geht Vermutung II.2.9 ein.

$$\text{Also } \beta \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$$

Bleibt somit die Existenz von $\bar{U}$ zu zeigen.

Wir setzen $\bar{U} := \varphi(G \times_H K_{\epsilon/2})$. $U \subseteq \bar{U}$ ist klar nach Wahl von U beziehungsweise U' . Nun ist $K_{\epsilon} - K_{\epsilon/2}$ H -äquivarianter starker Deformationsretrakt von $K_{\epsilon} - \{0\}$. Damit ist $G \times_H (K_{\epsilon} - K_{\epsilon/2})$ G -äquivarianter starker Deformationsretrakt von $G \times_H (K_{\epsilon} - \{0\})$, und folglich gilt dasselbe für $\varphi(G \times_H K_{\epsilon}) - \bar{U}$ und $\varphi(G \times_H K_{\epsilon}) - G\lambda$:

Ist nämlich $\rho: (K_{\epsilon} - \{0\}) \times I \xrightarrow{H} K_{\epsilon} - \{0\}$ H -Homotopie zwischen $\rho_0 = \text{id}$ und der radialen Retraktion

$$\rho_1: K_{\epsilon} - \{0\} \longrightarrow K_{\epsilon} - K_{\epsilon/2} \subset K_{\epsilon} - \{0\}, \text{ so ist}$$

$$\sigma: G \times_H (K_{\epsilon} - \{0\}) \times I \xrightarrow{G} G \times_H (K_{\epsilon} - K_{\epsilon}/2),$$

$$\sigma([g, w], t) := [g, \rho(w, t)]$$

wohldefiniert und äquivariant.

Damit ist dann auch $\Lambda - \bar{U}$ äquivarianter starker Deformationsretrakt von $\Lambda - G\Lambda$ wie gewünscht.

Zu $i_*(\Sigma_{\Lambda_0-1})=0$:

Nach Wahl von U' faktorisiert $i: S_{\Lambda_0} \xrightarrow{G} \Lambda - U$ über B_{Λ_0} oder über S_{Λ} . Jetzt folgt wie im ersten Fall $i_*(\Sigma_{\Lambda_0-1})=0$.

b) $\iota=2$

Wir setzen für $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_2$

$$c_2(\mathcal{T}): (B_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \xrightarrow{G} (O_0, O_0 - \mathcal{T})$$

und betrachten die Menge

$$N_2 := \{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_2: \mathcal{T} \text{ abgeschlossen in } \mathcal{T}_2, c_2(\mathcal{T})_*(\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0\}.$$

Nach Proposition 2.12 ist $\mathcal{T}_2 \in N_2$, und wie üblich zeigt man die Existenz eines bezüglich " $\subset$ " minimalen Elements $\mathcal{T}'_2$ von N_2 . Die Dimensionsaussage über $\mathcal{T}'_2$ beweist man nun wie in Proposition I.3.8. Die Übertragung des entsprechenden Beweisteils b) 2. Schritt von Proposition I.3.8 auf die äquivariante Situation besteht hier nur aus dem Ersetzen der dortigen Bezeichnungen durch ihre äquivarianten Analoga. Sie wird deshalb hier nicht ausgeführt. ■

Damit ist auch Satz 2.2 vollständig bewiesen; es bleibt nur noch Satz 2.4 zu zeigen.

Hier war erst einmal $|V^G| \geq 1$ vorausgesetzt worden. Außerdem war

$$L: (S_{\Lambda_0}, *) \longrightarrow (GL(V), Id), L(\lambda) = D_V f(\lambda, 0),$$

wohldefiniert und stetig. Nach Lemma 2.3 ist L äquivariant und

induziert ein Element $\gamma \in [S_{\Lambda_0}, GL(V)]_G^*$. Wir haben zu zeigen:

$$J_G \gamma \neq 0 \in \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + V - 1}^G(S_V^V) \Rightarrow f_*(\Sigma_{\Lambda_0 - 1} \times \Sigma_{V - 1}) \neq 0.$$

Sei $F: S_{\Lambda_0} \times S_V \longrightarrow V - \{0\}$, $F(\lambda, v) := L(\lambda) \cdot v$.

2.17 Lemma: F ist äquivariant und G -homotop zu

$$f|: S_{\Lambda_0} \times S_V \xrightarrow{G} V - \{0\}.$$

Beweis: Die Äquivarianz von F wurde schon in II.1.18 bei der Konstruktion des J_G -Homomorphismus gezeigt. Die gesuchte Homotopie ist dieselbe wie in Lemma I.3.13:

$$\begin{aligned} H: S_{\Lambda_0} \times S_V \times I &\longrightarrow V - \{0\}, \\ H(\lambda, v, t) &:= \begin{cases} L(\lambda)v + [f(\lambda, tv) - tL(\lambda)v]/t & t \neq 0 \\ L(\lambda)v & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Man bestätigt leicht, daß H äquivariant ist. ■

Es genügt also zu zeigen:

$$J_G \gamma \neq 0 \Rightarrow F_*(\Sigma_{\Lambda_0 - 1} \times \Sigma_{V - 1}) \neq 0$$

Da S_V äquivarianter starker Deformationsretrakt von $V - \{0\}$ ist, können wir ohne Einschränkungen voraussetzen, daß $\text{Bild } F \subset S_V$; also von jetzt an $F: S_{\Lambda_0} \times S_V \xrightarrow{G} S_V$.

F induziert vermöge der Hopf-Konstruktion eine äquivariante Abbildung $\Gamma F: (S_{\Lambda_0} * S_V; B_{\Lambda_0} \times S_V, S_{\Lambda_0} \times B_V) \xrightarrow{G} (S_V^V; B_V, S_V^V - B_V)$, siehe II.1.18, so daß das folgende Diagramm kommutiert (vergleiche S. 55)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + V - 1}^G(S_{\Lambda_0} \times S_V) & \cong & \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + V - 1}^G(S_{\Lambda_0} * S_V) \xrightarrow{\partial_2} \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + V - 2}^G(S_{\Lambda_0} \times S_V) \\ & \downarrow (\Gamma F)_* & \downarrow F_* \\ \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + V - 1}^G(S_V^V) & \xrightarrow{\partial_1} & \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + V - 2}^G(S_V^V) \end{array}$$

Um mit der reduzierten Homologie arbeiten zu können, benötigen wir einen Basispunkt in $S_{\Lambda_0} \times S_V$, der wegen $|\Lambda_0^G|, |V^G| \geq 1$ existiert.

Nach Konstruktion II.1.18 gilt (wir unterdrücken den G -Homöomorphismus $S_{\Lambda_0 \times V} \xrightarrow{G} S_{\Lambda_0} * S_V$) $J_G \gamma = (\Gamma F)_* (\Sigma_{\Lambda_0 + V - 1})$.

Jetzt folgt $F_*(\Sigma_{\Lambda_0 - 1} \times \Sigma_{V - 1}) \neq 0$ aus

i) $\partial_1(J_G \gamma) \neq 0$ und

ii) $\exists r \in \omega_0^G(P)$ Einheit: $r \cdot \partial_0(\Sigma_{\Lambda_0 + V - 1}) = \Sigma_{\Lambda_0 - 1} \times \Sigma_{V - 1}$

Dann ist nämlich $F_*(\Sigma_{\Lambda_0 - 1} \times \Sigma_{V - 1}) = r \cdot \partial_1(J_G \gamma) \neq 0$.

Zu i): ∂_1 ist Randoperator der reduzierten Mayer-Vietoris-Sequenz der Triade $(S^V; B_V, S^V - \tilde{B}_V)$. Da $\tilde{\omega}_*(B_V) \cong \{0\} \cong \tilde{\omega}_*(S^V - \tilde{B}_V)$ gilt, ist ∂_1 bijektiv.

Zu ii): Dies ist Proposition II.1.13ii).

Damit ist auch Satz 2.4 bewiesen.

Wie in Bemerkung 2.5a) angekündigt, skizzieren wir nun noch, wie man im Fall $J_G(\gamma) \neq 0$ aber $|V^G| = 0$ Verzweigung nachweist. Wir haben also $f: O \rightarrow V$ mit den zu Anfang des Paragraphen aufgeführten Eigenschaften. Außerdem sei $L(\lambda) = D_v f(\lambda, 0)$ für $\lambda \in S_{\Lambda_0}$ wohldefiniert, nicht singular und stetig in λ ; $\gamma \in [S_{\Lambda_0}, GL(V)]_G^*$ sei von L induziert. Es gelte $J_G(\gamma) \neq 0$ aber $|V^G| = 0$. Satz 2.4 läßt sich also nicht anwenden. Wir führen künstlich Fixpunkte ein, und zwar setzen wir:

$\tilde{V} := V \times \mathbb{R}$, V und alle Teilmengen A von V werden mit $V \times \{0\}$ bzw. $A \times \{0\}$ identifiziert,

$\tilde{O} := O \times \mathbb{R} \subset \Lambda \times V \times \mathbb{R} = \Lambda \times \tilde{V}$, $\tilde{O}_0 := \tilde{O} \cap (\Lambda \times \{0\}) = O_0$,

$\tilde{f}: \tilde{O} \rightarrow \tilde{V}$, $\tilde{f}(\lambda, v, r) := (f(\lambda, v), r)$.

$\tilde{f}$ ist stetig und äquivariant, $\tilde{f}|_{\tilde{O}_0} = 0$, $\tilde{f}^{-1}(0) = f^{-1}(0)$. Alle weiteren zu Beginn des Paragraphen gemachten Voraussetzungen von Satz 2.1 sind für $\tilde{f}$ erfüllt, wenn sie für f gelten. Außerdem ist

$$\tilde{L}: S_{\Lambda_0} \longrightarrow GL(\tilde{V}), \quad \tilde{L}(\lambda) := D_{\tilde{V}}(\lambda, 0) = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wohldefiniert und stetig, weil L es ist. Da wie im nichtäquivarianten Fall das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\gamma} \in [S_{\Lambda_0}, GL(\tilde{V})]_G^* & \longrightarrow & \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + \tilde{V} - 1}^G(S^{\tilde{V}}) \\ \downarrow & & \downarrow E \\ \tilde{\gamma} \in [S_{\Lambda_0}, GL(\tilde{V})]_G^* & \longrightarrow & \tilde{\omega}_{\Lambda_0 + \tilde{V} - 1}^G(S^{\tilde{V}}) \end{array}$$

kommutiert (E ist Einhängungsisomorphismus), folgt $J_G(\tilde{\gamma}) \neq 0$ aus $J_G(\gamma) \neq 0$. Satz 2.4 angewandt auf $\tilde{f}$ liefert $\tilde{f}_*(\Sigma_{\Lambda_0 - 1} \times \Sigma_{\tilde{V}}) \neq 0$, wobei $\Sigma_{\tilde{V}} := \Sigma_{\tilde{V} \times \mathbb{R} - 1} = \Sigma_{\tilde{V} - 1}$. Nun wenden wir Satz 2.1 auf $\tilde{f}$ an und übertragen die Aussagen gleich auf f - soweit möglich.

Es gibt also relativ abgeschlossene und invariante Teilmengen $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ von $\tilde{f}^{-1}(0) - \tilde{O}_0 = f^{-1}(0) - O_0$, $\mathcal{Y}_2 \subseteq \mathcal{Y}_1$, mit:

a) $(0, 0) \in \bar{\mathcal{Y}}_2 \subset \bar{\mathcal{Y}}_1$,

b) $\mathcal{Y}_2/G$ ist zusammenhängend,

$\mathcal{Y}_1/G$ oder $(\mathcal{Y}_1 \cup \{\tilde{c}\})/G$ ist zusammenhängend, wobei $\tilde{c} \in \tilde{O}$ kompaktifiziert.

Dann ist klar, daß auch $\mathcal{Y}_1/G$ oder $(\mathcal{Y}_1 \cup \{c\})/G$ zusammenhängend ist, wobei $c \in O$ kompaktifiziert; denn $(\mathcal{Y}_1 \cup \{c\})/G$ ist G -homöomorph zu $(\mathcal{Y}_1 \cup \{\tilde{c}\})/G$. ■

c) Es gilt wenigstens eine der beiden folgenden Aussagen, $i=1, 2$:

i) $\mathcal{Y}_i$ ist in keiner kompakten Teilmenge von $\tilde{O}$ enthalten.

[Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{Y}_i$ in keiner kompakten Teilmenge von O enthalten ist.]

ii) Die Einbettung $d_i: S_{\Lambda_0} \hookrightarrow S^{\wedge - \mathfrak{F}_i}$ induziert einen Homomorphismus

$$d_{i*}: \omega_{\Lambda_0-1}^G(S_{\Lambda_0}) \longrightarrow \omega_{\Lambda_0-1}^G(S^{\wedge - \mathfrak{F}_i})$$

mit $d_{i*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0$.

d) Wegen $\mathfrak{F}_i = \bar{\mathfrak{F}}_i \cap \sigma_0 = \bar{\mathfrak{F}}_i \cap \bar{\sigma}_0 =: \mathfrak{F}_i$, $i=1,2$, und $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0$, ist

$$c_1 = \tilde{c}_1: \mathfrak{F}_{\Lambda_0} \xrightarrow{G} \sigma_0 - \mathfrak{F}_1 = \bar{\sigma}_0 - \mathfrak{F}_1 \text{ und}$$

$$c_2 = \tilde{c}_2: (\mathfrak{B}_{\Lambda_0}, S_{\Lambda_0}) \xrightarrow{G} (\sigma_0, \sigma_0 - \mathfrak{F}_2) = (\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_0 - \mathfrak{F}_2).$$

Also:

$$c_{1*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) = \tilde{c}_{1*}(\Sigma_{\Lambda_0-1}) \neq 0 \text{ und } c_{2*}(\Delta_{\Lambda_0}) = \tilde{c}_{2*}(\Delta_{\Lambda_0}) \neq 0.$$

$$e) \bar{\mathfrak{F}}_2 \cap \text{rd}(\sigma) = \bar{\mathfrak{F}}_2 \cap \text{rd}(\bar{\sigma}) = \emptyset \Rightarrow \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2.$$

Anhang 1: Verallgemeinerte (Ko-) Homologietheorien

Hier wollen wir an die für Kapitel I notwendigen Begriffe aus der algebraischen Topologie erinnern und die dort verwendeten Ergebnisse zusammenstellen. Wenn möglich wird für den Beweis auf die Literatur verwiesen.

Zuerst ein paar Worte über Spektren $\underline{E}$ und die dazugehörige (Ko-) Homologietheorie E_* beziehungsweise E^* . Ein Spektrum besteht aus einer Folge $\underline{E} = (E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ punktierter CW-Komplexe $(E_n, *)$, so daß $S^1 \wedge E_n$, die reduzierte Einhängung von E_n , homöomorph zu einem Teilkomplex von E_{n+1} ist. Die Konstruktion von E_* und E^* ist im allgemeinen zu langwierig, um hier beschrieben zu werden. Man sehe dazu etwa Switzer [46], Kapitel 8. Für uns ist vor allem das Sphärenspektrum interessant, das heißt $E_n = S^n$, $S^1 \wedge S^n \cong S^{n+1}$ für $n \geq 0$, $E_n = \{*\}$ für $n < 0$. Die dazugehörige (Ko-) Homologietheorie ist die stabile (Ko-) Homotopie und wird mit ω_* beziehungsweise ω^* bezeichnet. Die Gruppen $\omega_n(\cdot)$ und $\omega^n(\cdot)$ sind wie folgt definiert. Für ein Raumpaars (X, A) sei C_i der Abbildungskegel der Einbettung $i: A^+ \hookrightarrow X^+$, wobei $A^+ = A \amalg \{*\}$, $X^+ = X \amalg \{*\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\omega_n(X, A) &:= \operatorname{colim}_{r \rightarrow \infty} [S^{r+n}, S^r \wedge C_i]^* = \operatorname{colim}_{r \rightarrow \infty} \pi_{r+n}(S^r \wedge C_i) \\ \omega^n(X, A) &:= \operatorname{colim}_{r \rightarrow \infty} [S^r \wedge C_i, S^{r+n}]^*.\end{aligned}$$

Dabei ist $[Y, Z]^*$ die Menge der Homotopieklassen punktierter Abbildungen $Y \rightarrow Z$. Die für den Kolimes nötigen Homomorphismen kommen von der Einhängung $[Y, Z]^* \longrightarrow [S^1 \wedge Y, S^1 \wedge Z]^*$.

Seien nun solche "darstellbaren" Theorien h_* und h^* gegeben.

Diese erfüllen die Eilenberg-Steenrod-Axiome bis auf das Dimensionsaxiom. Damit steht uns der bekannte Apparat wie zum Beispiel die exakte Sequenz eines Tripels, Mayer-Vietoris-Sequenzen, reduzierte Homologie usw. zur Verfügung. Falls h_* und h^* durch ein kommutatives Ringspektrum dargestellt werden (siehe Switzer loc. cit. S. 269), so sind h_* und h^* multiplikativ. In diesem Fall gibt es also externe Produkte

$$\times: h_n(X, A) \otimes h_m(Y, B) \longrightarrow h_{n+m}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

$$\times: h^n(X, A) \otimes h^m(Y, B) \longrightarrow h^{n+m}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

$$/: h^n(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \otimes h_m(Y, B) \longrightarrow h^{n-m}(X, A)$$

$$\backslash: h^n(X, A) \otimes h_m(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \longrightarrow h_{m-n}(Y, B)$$

Dabei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß die Triade $(X \times B \cup A \times Y; X \times B, A \times Y)$ h_* -exakt ist. Bei uns wird entweder gelten: $X \times B \cup A \times Y = (X \times B) \cup (A \times Y)$, oder es handelt sich um CW-Komplexe. Mit Hilfe dieser externen Produkte (und natürlich der Diagonalabbildung) kann man - wie von der singulären Theorie bekannt - interne Produkte $\cup$ und $\cap$ definieren.

$$\cup: h^n(X, A) \otimes h^m(X, B) \longrightarrow h^{n+m}(X, A \cup B)$$

$$\cap: h^n(X, A) \otimes h_m(X, A \cup B) \longrightarrow h_{m-n}(X, B)$$

Dabei muß $(A \cup B; A, B)$ h_* -exakt sein.

Für die Definitionen und Eigenschaften dieser Produkte verweisen wir auf Switzer loc. cit. Kapitel 13. Hier sei nur noch festgehalten, daß das $\cup$ -Produkt $h^*(X, A)$ zu einem graduierten kommutativen Ring macht $\{u \cup v = (-1)^{nm} v \cup u \text{ für alle } u \in h^n(X, A) \text{ und } v \in h^m(X, A)\}$. Für den einpunktigen Raum P wird

$$R := h^*(P) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h^n(P) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h_n(P) = h_*(P)$$

[genauer $h^n(P) \cong h_{-n}(P)$] sogar zu einem graduierten kommutativen Ring mit $1 \in h^0(P)$. Das $\times$ -Produkt macht außerdem $h_*(X, A)$ und

$h^*(X, A)$ zu R -Bimoduln (bei MacLane [37], V.3: R - R -Bimodul). Stetige Abbildungen $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ induzieren Ring- oder Bimodulhomomorphismen auf (Ko-) Homologieniveau.

Die beiden folgenden Propositionen benötigen wir zum Beweis von I.3.6, I.3.8 und I.3.14.

1.1 Proposition: Seien $l, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$x: h_*(B^l, S^{l-1}) \otimes_R h_*(S^{n-1}) \longrightarrow h_*(B^l \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1})$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Switzer loc. cit. Theorem 13.75. Man benötigt nur, daß

$$h_*(B^l, S^{l-1}) \cong \bar{h}_*(B^l/S^{l-1}) \cong R \text{ freier } R\text{-Modul ist.} \quad \blacksquare$$

Wie in § 1.2 beschrieben, kommt $\Sigma_r \in h_r(S^r)$ von der Einhängung der $1 \in h_0(P) \cong \tilde{h}_0(S^0) \cong \tilde{h}_r(S^r)$, und $\Delta_{r+1} \in h_{r+1}(B^{r+1}, S^r) \cong \tilde{h}_r(S^r)$ entspreche Σ_r .

1.2 Proposition: Wir betrachten die von Einbettungen induzierten Abbildungen $[S := \text{rd}(B^l \times B^n)]$

$$i_*: h_{l+n-1}(B^l \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow h_{l+n-1}(S, S^{l-1} \times B^n),$$

$$j_*: h_{l+n-1}(S) \longrightarrow h_{l+n-1}(S, S^{l-1} \times B^n),$$

sowie die Randoperatoren

$$\partial_0: h_{l+n-1}(S^{l+n-1}) \cong h_{l+n-1}(S) \longrightarrow h_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1})$$

$$\partial_1: h_{l+n-1}(B^l \times B^n, S) \longrightarrow h_{l+n-1}(S, S^{l-1} \times B^n).$$

∂_0 kommt von der Mayer-Vietoris-Sequenz der ausschneidenden Triade $(S; B^l \times S^{n-1}, S^{l-1} \times B^n)$, ∂_1 ist Randoperator des Tripels $(B^l \times B^n, S, S^{l-1} \times B^n)$. Dann gilt:

$$i) \quad \exists r \in h_0(P) \text{ Einheit: } r \cdot j_*(\Sigma_{l+n-1}) = i_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1})$$

$$ii) \quad r \cdot \partial_0(\Sigma_{l+n-1}) = \Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}, \quad r \text{ aus i)}$$

$$iii) \quad \partial_1(\Delta_1 \times \Delta_n) = (-1)^l i_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1})$$

Beweis: Da $\Sigma_{l+n-1}, \Sigma_{n-1}$ in den entsprechenden reduzierten Homologiegruppen liegen, genügt es, mit diesen zu arbeiten.

i) Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_1 \times \Sigma_{n-1} \in h_{l+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1}) \\
 \downarrow i_* & & \downarrow i|_* \\
 \tilde{h}_{l+n-1}(S) \xrightarrow{j_*} h_{l+n-1}(S, S^{l-1} \times B^n) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{l+n-2}(S^{l-1} \times B^n)
 \end{array}$$

Nach Switzer [46], 13.56i) gilt:

$$i|_* \partial(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) = i|_*(\partial \Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) = i|_*(\Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}) = 0,$$

woraus folgt: $\sigma := i_*(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) \in \text{Kern } \partial = \text{Bild } j_*$.

Nun ist aber $\tilde{h}_*(S) \cong \tilde{h}_*(S^{l+n-1})$ freier (linker) R -Modul mit einzigem Erzeugenden Σ_{l+n-1} . Also existiert $\text{reh}_*(P)$ mit $\sigma = j_*(r \cdot \Sigma_{l+n-1}) = r \cdot j_*(\Sigma_{l+n-1})$. Aus Dimensionsgründen liegt r in $h_0(P)$. Da weiter i_* Ausschneidungsisomorphismus ist, folgt:

$$\Delta_1 \times \Sigma_{n-1} = i_*^{-1}(\sigma) = r \cdot i_*^{-1} j_*(\Sigma_{l+n-1}).$$

Nach Proposition 1.1 ist

$$h_*(B^1 \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1}) \cong h_*(B^1, S^{l-1}) \bullet_R h_*(S^{n-1})$$

freier R -Modul und $\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}$ einer der (beiden) Erzeugenden. Dann muß aber r Einheit sein, womit i) bewiesen ist.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ii) } h_{l+n-1}(S^{l+n-1}) \cong h_{l+n-1}(S) & \xrightarrow{\partial_*} & h_{l+n-2}(S^{l-1} \times S^{n-1}) \\
 \downarrow j_* & & \uparrow \partial \\
 h_{l+n-1}(S, S^{l-1} \times B^n) & \xrightarrow{\cong} & h_{l+n-1}(B^1 \times S^{n-1}, S^{l-1} \times S^{n-1})
 \end{array}$$

Nach i) ist $r \cdot i_*^{-1} j_*(\Sigma_{l+n-1}) = \Delta_1 \times \Sigma_{n-1}$. Nun folgt die Behauptung aus $\partial(\Delta_1 \times \Sigma_{n-1}) = \Sigma_{l-1} \times \Sigma_{n-1}$.

iii) Switzer loc. cit. Proposition 13.56ii)

Zu h^* kann man eine Čech-Kohomologietheorie $\check{h}^*$ konstruieren. Diese Konstruktion ist ausführlich beschrieben in Eilenberg/Steenrod [16] für $H^*(.;G)$ und sehr allgemein in Dold [15], VIII.6 und Appendix, sowie Lee/Raymond [34]. Zur Erinnerung:

$$\check{h}^n(X,A) := \operatorname{colim}_{\mathcal{U}} h^n(N\mathcal{U}, N(\mathcal{U}|A)),$$

wobei $\mathcal{U}$ die gerichtete Menge der offenen Überdeckungen von X durchläuft, $\mathcal{U}|A = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ und $N\mathcal{U}$ beziehungsweise $N(\mathcal{U}|A)$ der dazugehörige Nerv ist. Falls (X,A) ein lokalkompaktes Paar in einem euklidischen Umgebungsretrakt E ist, $A \subset X \subset E$, so gilt

$$\check{h}^n(X,A) \cong \operatorname{colim}_{(U,V)} h^n(U,V),$$

wobei $V \subset U$ die Umgebungen von $A \subset X$ durchlaufen (vergleiche Dold loc. cit. sowie Adams [3], S. 250). In dieser Arbeit sind X, A immer lokalkompakte Teilmengen einer kompakten Mannigfaltigkeit, die ja ein euklidischer Umgebungsretrakt ist. Die (verallgemeinerte) Kohomologietheorie $\check{h}^*$ besitzt folgende wichtige Stetigkeitseigenschaft.

1.3 Satz: Sei E ein euklidischer Umgebungsretrakt und $\mathfrak{D}$ ein direktes System kompakter Paare (K,L) in E , gerichtet durch umgekehrte Inklusion " $\supset$ ". $(X,A) := \bigcap_{\mathfrak{D}} (K,L)$. Dann bilden die abelschen Gruppen $\check{h}^n(K,L)$, $(K,L) \in \mathfrak{D}$, $n \in \mathbb{Z}$ fest, und die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\check{h}^n(K,L) \longrightarrow \check{h}^n(K',L'), \quad (K,L) \supset (K',L'),$$

ein direktes System, und es gilt:

Die von den Einbettungen $(X,A) \hookrightarrow (K,L)$ induzierte Abbildung $\operatorname{colim}_{(K,L)} \check{h}^n(K,L) \longrightarrow \check{h}^n(X,A)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Dold loc. cit. S. 287

■

Als nächstes benötigen wir die Poincaré-Lefschetz-Dualität.

1.4 Satz: Sei M orientierbare triangulierbare Mannigfaltigkeit, $\dim M = m$ und (X, A) ein kompaktes Paar in M . Dann gibt es für alle $r \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$\Gamma_{X,A}: h_r(M-A, M-X) \xrightarrow{\cong} \check{h}^{m-r}(X, A).$$

Die folgenden Diagramme sind kommutativ.

i) Sei $(Y, B) \subset (X, A)$ ein weiteres kompaktes Paar in M .

$$\begin{array}{ccc} h_r(M-A, M-X) & \longrightarrow & h_r(M-B, M-Y) \\ \cong \downarrow \Gamma_{X,A} & & \cong \downarrow \Gamma_{Y,B} \\ \check{h}^{m-r}(X, A) & \longrightarrow & \check{h}^{m-r}(Y, B) \end{array}$$

Die beiden waagrechten Homomorphismen sind natürlich von den entsprechenden Einbettungen induziert.

$$\begin{array}{ccc} \text{ii)} \quad h_{r+1}(M, M-A) & \xrightarrow{\partial} & h_r(M-A, M-X) \\ \cong \downarrow \Gamma_{A, \emptyset} & & \cong \downarrow \Gamma_{X,A} \\ \check{h}^{m-r-1}(A) & \xrightarrow{\delta} & \check{h}^{m-r}(X, A) \end{array}$$

Hier ist ∂ Randoperator des Tripels $(M, M-A, M-X)$ und δ Korandoperator des Paares (X, A) .

Beweis: Adams [3], S. 259

Für Satz 1.4 genügt es, daß M bezüglich h_* orientierbar ist. Mit Hilfe dieser Dualität übertragen wir nun die Stetigkeit von h^* auf h_* , um in den Anwendungen nicht immer den Dualitätsisomorphismus mitschleppen zu müssen.

1.5 Satz: Sei M eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{A}$ ein direktes System offener Paare (U, V) in M , gerichtet durch " $\subset$ ". $(X, A) := \bigcup_{\mathfrak{A}} (U, V)$. Dann bilden die abelschen

Gruppen $h_n(U, V)$, $(U, V) \in \mathfrak{S}$, $n \in \mathbb{Z}$ fest, und die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$h_n(U, V) \longrightarrow h_n(U', V'), \quad (U, V) \subset (U', V'),$$

ein direktes System, und es gilt:

Die von den Inklusionen $(U, V) \hookrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung $\operatorname{colim}_{(U, V)} h_n(U, V) \longrightarrow h_n(X, A)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Mit Hilfe der Poincaré-Lefschetz-Dualität 1.4 wird die Behauptung auf die Stetigkeit von $\check{h}^*$, Satz 1.3, zurückgeführt. ■

Den Abschluß dieses Anhangs bildet ein zum Beweis der Dimensionaussagen in Kapitel I benötigter Satz.

1.6 Satz: Sei h_* zusammenhängend, das heißt $h_n(P) \cong \{0\}$ für $n < 0$, und X kompakter topologischer Raum. Dann gilt:

Überdeckungsdimension von $X \leq d \Rightarrow \forall n > d: \check{h}^n(X) \cong \{0\}$.

Beweis: Es ist $\check{h}^n(X) = \operatorname{colim}_{\mathfrak{U}} h^n(N\mathfrak{U})$, wobei $N\mathfrak{U}$ der zur Überdeckung $\mathfrak{U}$

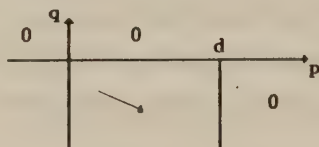
$\mathfrak{U}$ von X gehörige Nerv ist. Nun besagt aber die Dimensionsvoraussetzung an X gerade, daß die Menge $\mathfrak{F}$ der endlichen Überdeckungen $\mathfrak{U}$ der Ordnung $\leq d$ kofinal ist. Dabei ist die Ordnung von $\mathfrak{U}$ die größte ganze Zahl n (beziehungsweise ∞), so daß $n+1$ (bzw. beliebig viele) Elemente von $\mathfrak{U}$ nichtleeren Durchschnitt haben. Somit $\check{h}^n(X) \cong \operatorname{colim}_{\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}} h^n(N\mathfrak{U})$.

Für $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}$ ist $N\mathfrak{U}$ endlicher simplizialer Komplex, und es gilt: $\dim N\mathfrak{U} \leq d$. Nun bleibt nur noch für solche Komplexe K zu zeigen:

$$\forall n > d: h^n(K) \cong \{0\}.$$

Dies ist eine bekannte Aussage für die singuläre Kohomologietheorie $H^*(\cdot; G)$, G beliebig, statt h^* . Zur Übertragung

auf h^* benutzen wir die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz $E_r^{p,q}$, $r \geq 2$, $p, q \in \mathbb{Z}$, mit $E_2^{p,q} \cong H^p(X; h^q(P))$. Für $q > 0$ ist $h^q(P) \cong h_{-q}(P) \cong \{0\}$, da h_* zusammenhängend ist. Also ist $E_2^{p,q} \cong \{0\}$ für $p > d$ oder $q > 0$, insbesondere für $p+q > d$.



Offensichtlich konvergiert diese Spektralsequenz, denn für $r > \max\{1-q, d-p\}$ ist $E_r^{p,q}$ konstant, $E_r^{p,q} \cong E_\infty^{p,q}$. Nun ist $E_\infty^{p,q} \cong F^{p-1, q+1} / F^{p, q}$ mit $F^{p, q} := \text{Kern}[h^{p+q}(K) \longrightarrow h^{p+q}(K^P)]$, wobei K^P das p -dimensionale Gerüst von K ist.

Für $n = p+q > d$ ist $E_\infty^{p,q} \cong \{0\}$, da schon $E_2^{p,q} \cong \{0\}$. Somit gilt: gilt: $h^n(K) = F^{-1, n+1} = F^{0, n} = \dots = F^{n, 0} \cong \{0\}$.

Das erste "=" gilt wegen $K^{-1} = \emptyset$, und das letzte wegen $K^n = K$ für $n > d$. ■

Anhang 2: Der J-Homomorphismus

2.1 Definition: a) Seien X, Y, Z topologische Räume, $F: X \times Y \rightarrow Z$ stetig. Dann ist

$$\Gamma F: X * Y := CX \times Y \cup X \times CY \longrightarrow SZ$$

definiert durch die Hopf-Konstruktion:

$$\Gamma F([t, x], y) := [t, F(x, y)] \quad \text{für } ([t, x], y) \in CX \times Y$$

$$\Gamma F(x, [t, y]) := [-t, F(x, y)] \quad \text{für } (x, [t, y]) \in X \times CY$$

Dabei ist $CX := (I \times X) / (\{1\} \times X)$ der Kegel über X und $SZ := ([-1, 1] \times Z) / \sim$, $(1, z) \sim (1, z')$, $(-1, z) \sim (-1, z')$ für alle $z, z' \in Z$, die (unreduzierte) Einhängung von Z . $X * Y$ ist der Join von X und Y .

b) $J: \pi_p(O(q), Id) \rightarrow \pi_{p+q}(S^q, *)$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, $q \geq 1$, $*$ $= (1, 0, \dots, 0)$ ist durch die folgende Konstruktion definiert (wir unterdrücken die Basispunkte).

Ein Element $\alpha \in \pi_p(O(q))$ sei repräsentiert von

$\varphi: S^p \rightarrow O(q)$. φ induziert eine Abbildung

$$\sharp: S^p \times S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}, \quad \sharp(x, y) := \varphi(x) \cdot y.$$

Dann sei $J(\alpha) := [\Gamma \sharp] = (\Gamma \sharp)_\sharp(1) \in \pi_{p+q}(S^q)$.

Man beachte: $\Gamma \sharp: S^{p+q} \cong S^p * S^{q-1} \rightarrow SS^{q-1} \cong S^q$,

$$1 = [id] \in \pi_{p+q}(S^{p+q}).$$

Daß J wohldefiniert und ein Homomorphismus ist, letzteres falls $p \geq 1$, ist bekannt; siehe zum Beispiel Whitehead [48], S. 504. Im Fall $p=0$ sieht man leicht (mit Hilfe des nächsten Lemmas), daß gilt:

$$J: Z_1 \cong \pi_0(O(q)) \rightarrow \pi_q(S^q) \cong Z, \quad J(0)=0, \quad J(1)=2$$

2.2 Lemma: a) Sei $e: O(q) \hookrightarrow O(q+1)$, $A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_p(O(q)) & \xrightarrow{J} & \pi_{p+q}(S^q) \\ \downarrow e_* & & \downarrow E = \text{Einh\"angung} \\ \pi_p(O(q+1)) & \xrightarrow{J} & \pi_{p+q+1}(S^{q+1}) \end{array}$$

Für $q > p+1$ sind e_* und E Isomorphismen, und man erhält den stabilen J -Homomorphismus

$$J: \pi_p(O) \cong \varinjlim_{q \rightarrow \infty} \pi_p(O(q)) \longrightarrow \varinjlim_{q \rightarrow \infty} \pi_{p+q}(S^q) =: \pi_p^s$$

b) Führt man dieselbe Konstruktion wie in 2.1 durch mit $GL(q)$ statt $O(q)$, so erhält man

$$J: \pi_p(GL(q)) \longrightarrow \pi_{p+q}(S(\mathbb{R}^q - \{0\})) \xrightarrow{\cong} \pi_{p+q}(\mathbb{R}^{q+1} - \{0\}),$$

wobei der Isomorphismus rechts von der Abbildung

$$S(\mathbb{R}^q - \{0\}) \ni [t, x] \mapsto ((1-t^2)x, t) \in \mathbb{R}^{q+1} - \{0\}$$

induziert wird. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_p(O(q)) & \xrightarrow{J} & \pi_{p+q}(S^q) \\ \cong \downarrow i_* & & \cong \downarrow \\ \pi_p(GL(q)) & \xrightarrow{J} & \pi_{p+q}(\mathbb{R}^{q+1} - \{0\}) \end{array}$$

kommutiert, setzt man häufig $J: \pi_p(GL(q)) \longrightarrow \pi_{p+q}(S^q)$.

Wie in a) erhält man den stabilen J -Homomorphismus

$$J: \pi_p(GL) \longrightarrow \pi_p^s.$$

Beweis: einfach

2.3 Satz (Bott-Periodizität): Die Homotopiegruppen $\pi_p(0)$ sind periodisch in p mit der Periode 8, das heißt für alle $p \in \mathbb{N}_0$ ist $\pi_{p+8}(0) \cong \pi_p(0)$. Diese Gruppen lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen.

$p \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_p(0)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Beweis: Bott [8] ■

2.4 Satz (Adams): Für $J: \pi_p(0) \longrightarrow \pi_p^s$ gilt:

- i) $p \equiv 0$ oder $1 \bmod 8 \Rightarrow J$ ist injektiv
- ii) $p = 4q-1, q \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Bild J ist zyklischer direkter

Summand von π_p^s

Beweis: Adams [1]; die Ordnung von Bild J im Fall ii) wurde von Adams u. a. ebenfalls berechnet. Siehe dazu etwa Husemoller [22], S. 226ff. ■

Anhang 3: Vektorraumbündel

Auch dieser Anhang enthält nur eine Zusammenstellung der benötigten Resultate.

Λ sei eine geschlossene, zusammenhängende und orientierbare C^1 -Mannigfaltigkeit, $k := \dim \Lambda \in \mathbb{N}$. (E, p, Λ) sei ein n -dimensionales orientierbares C^1 -Vektorraumbündel über Λ versehen mit einer Riemannschen Metrik. $s: \Lambda \rightarrow E$ sei der Nullschnitt. Dann ist E als $(k+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar.

3.1 Konstruktion der fasernweisen Ein-Punkt-Kompaktifizierung:

Sei $E_\infty := \{(\lambda, \infty) : \lambda \in \Lambda\}$. Wir setzen:

$$E^+ := E \cup E_\infty, \quad p^+: E^+ \rightarrow \Lambda, \quad p^+|_E := p, \quad p^+|_{E_\infty} := \text{pr}_\Lambda.$$

Die Topologie auf E^+ ist gegeben durch den wie folgt definierten Atlas $\mathcal{A}$.

Sei dazu $(U_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ein orientierter Atlas von Λ , $(p^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ der dazugehörige Bündelatlas von E , so daß die $\phi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h_\alpha \times \text{id}} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Lambda$, einen orientierten Atlas von E als $(k+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit bilden. $\mathcal{A}$ enthalte zum einen diese Karten ϕ_α , womit natürlich E^+ auf E die gegebene Topologie induziert. Um Karten um Punkte $(\lambda, \infty) \in E_\infty$ zu konstruieren,

$$\text{sei } J = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in O(n) \quad \text{und}$$

$$h: \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h(x) := \begin{cases} Jx/|x|^2 & x \neq \infty \\ 0 & x = \infty \end{cases}$$

h ist Homöomorphismus und differenzierbar an allen Stellen $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$; es gilt $\det Dh(x) > 0$. Dann enthalte A noch die Karten

$$\begin{aligned} \tau_\alpha: (p^+)^{-1}(U_\alpha) - s(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \\ \tau_\alpha(v) &:= \begin{cases} (h_\alpha \circ h) \circ p_\alpha(v) & v \in p^{-1}(U_\alpha) - s(U_\alpha) \\ (h_\alpha \circ p^+(v), 0) & v \in p^{-1}(U_\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

3.2 Satz: a) E^+ ist mit diesem Atlas eine orientierte C^1 -Mannigfaltigkeit, $\dim E^+ = k+n$.

b) (E^+, p^+, Λ) ist ein Sphärenbündel über Λ , die Faser ist homöomorph zu S^n . Insbesondere ist E^+ kompakt.

Beweis: a) Man rechnet leicht nach, daß die Determinanten der Kartenwechsel positiv sind.

b) klar ■

E^+ darf natürlich nicht verwechselt werden mit dem zu (E, p, Λ) gehörenden Sphärenbündel $(SE, p|_{SE}, \Lambda)$, wobei $SE = \{v \in E: \|v\|=1\}$. Hier ist die Faser homöomorph zu S^{n-1} .

Für den folgenden Satz vom Thom-Isomorphismus benötigen wir noch das zu (E, p, Λ) gehörende Scheibenbündel $(BE, p|_{BE}, \Lambda)$ mit $BE = \{v \in E: \|v\| \leq 1\}$; die Faser ist hier homöomorph zu B^n . Sei h_* eine multiplikative darstellbare Homologietheorie.

3.3 Satz (Thom-Isomorphismus): Seien $D \subset C \subset \Lambda$ lokal wegzusammenhängend, die Triade $(SE|C \cup BE|D; SE|C, BE|D)$ sei ausschneidend. Dann gibt es für alle $q \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$\phi^{C,D}: h_{q+n}(BE|C, SE|C \cup BE|D) \longrightarrow h_q(C, D).$$

$\phi^{C,D}$ ist natürlich in (C, D) .

Beweis: Wir geben hier nur die Definition von $\Phi^{C,D}$ an und verweisen für den Beweis der Isomorphie auf die Literatur. Da (E, p, Λ) orientierbar ist, gibt es eine Thom-Klasse (Orientierung) $t \in h^n(BE, SE)$, das heißt für alle $\lambda \in \Lambda$ induziert die Einbettung

$$(B^n, S^{n-1}) \cong (BE|\{\lambda\}, SE|\{\lambda\}) \xrightarrow{i} (BE, SE)$$

einen Homomorphismus

$$i_*: h^*(BE, SE) \longrightarrow h^*(BE|\{\lambda\}, SE|\{\lambda\}),$$

so daß $i^*(t) \in h^*(BE|\{\lambda\}, SE|\{\lambda\})$ erzeugt als $h^*(P)$ -Modul.

Man beachte: $h^*(BE|\{\lambda\}, SE|\{\lambda\}) \cong h^*(B^n, S^{n-1}) \cong \tilde{h}^*(S^n) \cong \tilde{h}^*(S^0) \cong h^*(P)$.

Dann erhalten wir für $C \subset \Lambda$ die eingeschränkte Thom-Klasse $t_C \in h^n(BE|C, SE|C)$ als Bild von $t = t_\Lambda$ unter

$$h^n(BE, SE) \longrightarrow h^n(BE|C, SE|C).$$

Für $x \in h_{q+n}(BE|C, SE|C \cup BE|D)$ setzen wir

$$\Phi^{C,D}(x) := p_*(t_C \cap x) \in h_q(C, D),$$

wobei $p: (BE|C, BE|D) \longrightarrow (C, D)$. $t_C \cap x$ ist definiert wegen der Ausschneidungsvoraussetzung des Satzes. Die Natürlichkeit von $\Phi^{C,D}$ in (C, D) bestätigt man leicht:

Seien nämlich $i: (C', D') \hookrightarrow (C, D)$ und

$$j: (BE|C', SE|C' \cup BE|D') \hookrightarrow (BE|C, SE|C \cup BE|D)$$

Einbettungen. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} h_{q+n}(BE|C', SE|C' \cup BE|D') & \xrightarrow{t_{C'}^n} & h_q(BE|C', BE|D') & \xrightarrow{p_*} & h_q(C', D') \\ \downarrow j_* & & \downarrow j_* & & \downarrow i_* \\ h_{q+n}(BE|C, SE|C \cup BE|D) & \xrightarrow{t_C^n} & h_q(BE|C, BE|D) & \xrightarrow{p_*} & h_q(C, D) \end{array}$$

Dies ist klar für das rechte Quadrat. Um die Kommutativität des linken Quadrats zu zeigen, betrachten wir ein $x \in h_{q+n}(BE|C', SE|C' \cup BE|D')$. Nach Definition ist $t_C = j_*^*(t_C)$, $j_*^*: h^n(BE|C, BE|D) \longrightarrow h^n(BE|C', BE|D')$. Jetzt gilt mit Switzer [46], S. 281 und 13.57ii):

$$j_*^*(t_C, \cap x) = j_*(j_*^*(t_C) \cap x) = t_C \cap j_*(x).$$

Dies war zu zeigen.

Für die Hauptaussage des Satzes, daß nämlich $\phi^{C,D}$ ein Isomorphismus ist, verweisen wir auf Switzer loc. cit. S. 367. Dort ist allerdings vorausgesetzt, daß C wegzusammenhängend und D leer ist. Bei uns ist C lokal wegzusammenhängend und somit die topologische Summe der Wegkomponenten, $C = \bigcup_{i \in J} C_i$. Das gleiche gilt für D . Nun folgt die Bijektivität von $\phi^{C,\emptyset}$ aber aus der Bijektivität der $\phi^{C_i,\emptyset}$ und der Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in J} h_{q+n}(BE|C_i, SE|C_i) & \xrightarrow[\iota \in J]{\bigoplus \phi^{C_i, \emptyset}} & \bigoplus_{i \in J} h_q(C_i) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ h_{q+n}(BE|C, SE|C) & \xrightarrow{\phi^{C, \emptyset}} & h_q(C) \end{array}$$

Die senkrechten Abbildungen sind Isomorphismen, da h_* als darstellbare Homologietheorie additiv ist.

Die relative Form des Thom-Isomorphismus ($D \neq \emptyset$) folgt aus der absoluten mit Hilfe des Ser-Lemmas (vergleiche Whitehead [48], S.350, Lemma (5.4)). ■

3.4 Bemerkung: Die Voraussetzung von Satz 3.3 ist in unseren Anwendungen (Beweis von Proposition I.3.8) erfüllt. Dort betrachteten wir die Paare

$$(C, D) = (S^{l-1}, \emptyset) \text{ oder } (O_0 - \mathbb{T}, \emptyset) \text{ oder } (B^1, S^{l-1}) \text{ oder } (O_0, O_0 - U).$$

Die Ausschneidungseigenschaft ist trivial für die ersten beiden Paare (da $D = \emptyset$) und gilt für (B^1, S^{l-1}) , da es sich um ein CW-Paar handelt. Für $(O_0, O_0 - U)$ muß man sich etwas überlegen. Wichtig ist, daß $D := O_0 - U$ offen ist in $C := O_0$.

Die Triade $(SE|C \cup BE|D; SE|C, BE|D)$ ist homotopieäquivalent zur Triade $(\tilde{SE}|C \cup BE|D; \tilde{SE}|C, BE|D)$, wobei

$\tilde{SE} := \{v \in E: \frac{1}{2} < \|v\| \leq 1\}$. Und letztere ist ausschneidend, da $\tilde{SE}|C$ und $BE|D$ offen in ihrer Vereinigung sind.

3.5 Satz: a) Für den Thom-Isomorphismus

$$\phi_1: h_{l+n-1}(S^{l-1} \times B^n, S^{l-1} \times S^{n-1}) \longrightarrow h_{l-1}(S^{l-1})$$

$$\text{gilt: } \phi_1(\Sigma_{l-1} \times \Delta_n) = \Sigma_{l-1}.$$

b) Für den Thom-Isomorphismus

$$\phi_2: h_{l+n}(B^1 \times B^n, \text{rd}(B^1 \times B^n)) \longrightarrow h_l(B^1, S^{l-1})$$

$$\text{gilt: } \phi_2(\Delta_1 \times \Delta_n) = \Delta_1.$$

Beweis: a) Sei $p: S^{l-1} \times B^n \longrightarrow S^{l-1}$ die Projektion. Die zur Definition von ϕ_1 nötige Thom-Klasse ist

$$1 \times \Delta^n \in h^n(S^{l-1} \times B^n, S^{l-1} \times S^{n-1}),$$

wobei $1 \in h^0(S^{l-1})$ den ersten Summanden von $h^*(S^{l-1}) \cong h^*(P) \oplus \tilde{h}^*(S^{l-1})$ erzeugt, und $\Delta^n \in h^n(B^n, S^{n-1})$ den $h^*(P)$ -Modul $h^*(B^n, S^{n-1})$ erzeugt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi_1(\Sigma_{l-1} \times \Delta_n) &= p_*((1 \times \Delta^n) \cap (\Sigma_{l-1} \times \Delta_n)) = \\ &= ((1 \times \Delta^n) / \Delta_n) \cap \Sigma_{l-1} = 1 \cap \Sigma_{l-1} = \Sigma_{l-1} \end{aligned}$$

Dabei wurden die in Switzer stehenden Regeln beziehungsweise Definitionen 13.61vi), S. 279 iii) (siehe auch 13.51i)b)) und 13.60 benutzt.

b) Sei $p: (B^1 \times B^n, S^{1-1} \times B^n) \longrightarrow (B^1, S^{1-1})$ die Projektion.

Thom-Klasse ist (mit $1 \in h^0(B^1)$, Δ^n wie in a))

$$1 \times \Delta^n \in h^n(B^1 \times B^n, B^1 \times S^{n-1}).$$

Damit geht der Beweis wie in a) mit Δ_1 statt Σ_{1-1} . ■

Notationen

2^M	Potenzmenge der Menge M
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	Menge der natürlichen (≥ 1), ganzen, reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	$\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ - " -
$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ - " -
$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ - " -
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, \dots, x_n): x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}, n \in \mathbb{N}$
$\ \cdot\ $	euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$
B^n	$\{x \in \mathbb{R}^n: \ x\ \leq 1\}, n \in \mathbb{N}$
S^{n-1}	$\{x \in \mathbb{R}^n: \ x\ = 1\}, n \in \mathbb{N}$
$GL(n)$	$\{A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: A \text{ linear und bijektiv}\}$
$O(n)$	$\{A \in GL(n): A \text{ orthogonal}\}$
$f(x) = o(\ x\)$	falls $f(x)/\ x\ \rightarrow 0$ für $\ x\ \rightarrow 0$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
$f _A: A \rightarrow B$	Einschränkung von $f: X \rightarrow Y$ auf A, falls $A \subset X$, $B \subset Y$, $f(A) \subset B$
$f A$ oder $f $	$f : A \rightarrow B$, falls B (und A) aus dem Zusammenhang ersichtlich sind
Für topologische Räume X, A, B mit $A, B \subset X$ seien	
$\overset{\circ}{A}$	offener Kern von A (bezüglich X; X ist meist aus dem Kontext klar)
$\bar{A}$	Abschluß von A
$rd(A)$	Rand von A
$X-A$	topologische Differenz
$B-A$	$B - (B \cap A)$
CA oder $c_X A$	$X-A$

X/A	Quotientenraum, in dem A zu einem Punkt identifiziert ist
$\approx$	homotop (für stetige Abbildungen) beziehungsweise homotopieäquivalent (für topologische Räume)
A_3	Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen
$\mathcal{TOT}$	Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen
$\cong$	Isomorphie (in der jeweiligen Kategorie)
Π	Produkt
$X_1 \times X_2$	$\prod_{i=1,2} X_i$
μ	Koprodukt (in $\mathcal{TOT}$ topologische Summe)
colim	Kolimes, direkter Limes
$\otimes_R$	Tensorprodukt für R -Moduln, R Ring
$\otimes$	$\otimes_{\mathbb{Z}}$, Tensorprodukt für abelsche Gruppen

Bei Verweisen steht "Satz 2.6" in § 2 desselben Kapitels und Satz "II.2.6" in § 2 des Kapitels II.

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, J. F.: On the Groups $J(X)$ IV. Topology 5 (1966), 21-71
- [2] - " -: Prerequisites (on Equivariant Stable Homotopy) for Carlsson's Lecture. Lect. Notes in Math. 1051, Springer 1984, 483-532
- [3] - " -: Stable Homotopy and Generalised Homology. Chicago 1974
- [4] Alexander, J. C.: Bifurcation of Zeroes of Parametrized Functions. J. Func. Anal. 29 (1978), 37-53
- [5] - " -, Antman, S.: Global and Local Behavior of Bifurcating Multidimensional Nonlinear Eigenvalue Problems. Arch. Rat. Mech. and Anal. 76 (1981), 339-354
- [6] - " -, Auchmuty, J. F. G.: Globally Phase Locked Oscillations in Turing Rings. Unveröffentlicht
- [7] - " -, Yorke, J. A.: Global Bifurcation of Periodic Orbits. Am. J. Math. 100 no.1 (1978), 263-292
- [8] Bott, R.: The Stable Homotopy of the Classical Groups. Ann. Math. 70 (1959), 318-337
- [9] Bredon, G. E.: Equivariant Cohomology Theories. Lect. Notes Math. 34, Springer 1967
- [10] - " -: Introduction to Compact Transformation Groups. Academic Press 1972
- [11] Bröcker, T., tom Dieck, T.: Representations of Compact Lie Groups. Springer 1983
- [12] - " -, Jänich, K.: Einführung in die Differentialtopologie. Springer 1973
- [13] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory. Lect. Notes in Math. 766, Springer 1979

- [14] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis*, Bd. 4.
Vieweg 1976
- [15] Dold, A.: *Lectures on Algebraic Topology*. Springer 1972
- [16] Eilenberg, S., Steenrod, N. E.: *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton 1952
- [17] Hauschild, H.: Äquivariante Homotopie I. Arch. Math. 29
(1977), 158-165
- [18] - " -: Äquivariante Transversalität und äquivariante
Bordismentheorien. Arch. Math. 26 (1975), 536-546
- [19] - " -: Zerspaltung äquivarianter Homotopiemengen.
Math. Ann. 230 (1977), 279-292
- [20] Hopf, E.: Abzweigung einer periodischen Lösung von einer
stationären Lösung eines Differentialgleichungs-
systems. Ber. Math. Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss.
Leipzig 94 (1942), 1-22
- [21] Hurewicz, W., Wallman, H.: *Dimension Theory*. Princeton 1948
- [22] Husemoller, D.: *Fibre Bundles*. McGraw-Hill 1966
- [23] Hussein, S. Y.: The Equivariant J-homomorphism for Arbitrary
 S^1 -Actions. Indiana Univ. Math. J. 33 no. 5 (1984),
711-720
- [24] - " -: The T-equivariant J-homomorphism. Unveröffentlicht.
- [25] Illman, S.: Equivariant Singular Homology and Cohomology I.
Memoirs of the AMS 156
- [26] - " -: Equivariant Singular Homology and Cohomology for
Actions of Compact Lie Groups. Lect. Notes Math. 298
Springer 1971, 403-415
- [27] - " -: The Equivariant Triangulation Theorem for Actions
of Compact Lie Groups. Math. Ann. 262 (1983), 487-500

- [28] Ize, J., Massabó, I., Pejsachowicz, J., Vignoli, A.: Structure and Dimension of Global Branches of Solutions to Multiparameter Nonlinear Equations. Trans. AMS 291 (1985), 383-435
- [29] - " -, - " -, Vignoli, A.: Global Results on Continuation and Bifurcation for Equivariant Maps. Nonlinear Funct. Anal. and its Appl., NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci 173 (1986), 75-111
- [30] Kopell, N.: Forced and Coupled Oscillators in Biological Applications. Proc. Int. Congr. Math. Warschau 1983 Vol. 2, 1645-1659
- [31] Kosniowski, C.: Equivariant Cohomology and Stable Cohomotopy. Math. Ann. 210 (1974), 83-104
- [32] Krasnoselski, M. A.: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon Press 1964,
- [33] Lang, S.: Differential Manifolds. Addison Wesley 1972
- [34] Lee, C. N., Raymond, F.: Čech-Extensions of Contravariant Functors. Trans. AMS 133 (1968), 415-434
- [35] Lewis, L. G., May, J. P., Steinberger, M.: Equivariant Stable Homotopy Theory. Lect. Notes in Math. 1213, Springer 1986
- [36] Löffler, P.: Equivariant Framability of Involutions on Homotopy Spheres. Manuscripta math. 23 (1978), 161-171
- [37] MacLane, S.: Homology. Springer 1963
- [38] Matumoto, T.: On G-CW Complexes and a Theorem of J. H. C. Whitehead. J. Fac. Sci. Tokio 18 (1971/72), 363-374
- [39] McClure, J. E.: On the Groups $JO_G(X)$. Math. Z. 183 (1983), 229-253

- [40] Minami, H.: On Equivariant J-homomorphism for Involutions.
Osaka J. Math. 20 (1983), 109-122
- [41] Poincaré, H.: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique
céleste, Vol. I. Paris 1892
- [42] Rabinowitz, P. H.: Some Global Results for Nonlinear Eigen-
value Problems. J. Func. Anal. 7 (1971), 487-573
- [43] Rubinsztein, R. L.: On the Equivariant Homotopy of Spheres.
Dissertation, Warschau 1976
- [44] Schubert, H.: Topologie. Teubner 1964
- [45] Segal, G. B.: Equivariant Stable Homotopy Theory. Act. Cong
intern. Math. Tome 2 (1970), 59-63
- [46] Switzer, R. M.: Algebraic Topology - Homotopy and Homology.
Springer 1975
- [47] Waner, S.: Equivariant Homotopy and Milnor's Theorem.
Trans. AMS 258 (1980), 351-368
- [48] Whitehead, G. W.: Elements of Homotopy Theory. Springer 1979
- [49] - " -: On the Homotopy Groups of Spheres and Rotation
Groups. Ann. Math. 43 (1942), 634-640
- [50] Whitehead, J. H. C.: Simplicial Spaces, Nuclei and m -groups
Proc. London Math. Soc. (2) 45 (1939), 243-327
- [51] Willson, S. J.: Equivariant Homology Theories on G -complexes
Trans. AMS 212 (1975), 155-171
- [52] Winfree, A.T.: The Geometry of Biological Time. Springer 1980
- [53] Wirthmüller, K.: Equivariant Homology and Duality.
Manuscripta math. 11 (1976), 373-390

Lebenslauf

Geburtsdatum	5. Juli 1958
Geburtsort	Partenstein

Schulbildung

1965 - 1968	Burgschule Peine
1968 - 1977	Ratsgymnasium Peine
3. Mai 1977	Abitur am Ratsgymnasium Peine

Studium (Mathematik mit Nebenfach Informatik)

WS 1977/78 - SS 1983	Universität München
16. Juni 1983	Diplom in Mathematik
September 1983 - Mai 1984	University of Chicago
seit WS 1984/85	Universität München
SS 1985, WS 1985/86, SS 1986	wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität München

